

CHAPITRE I: OBJET DE LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

1.1. Introduction

La théorie de la mécanique des milieux continus est définie comme une branche des sciences de l'ingénieur et des sciences physiques qui étudie l'état d'équilibre ou de mouvement des corps qui sont soumis à l'action des forces extérieures ou intérieures des corps à l'échelle microscopique ou macroscopique. Elle peut aussi étudier la mécanique des systèmes de masses ponctuelles, leur mouvement, leur vitesse et leur accélération sous l'effet des forces, des mouvements ou des déformations.

En effet, la mécanique des milieux continus peut être définie comme une branche des sciences fondamentales qui concerne l'état d'équilibre ou le mouvement des corps qui sont soumis à l'action des contraintes. Elle concerne l'étude et l'analyse des structures mécaniques, le dessin et le concept des machines, la mécanique des fluides, l'aérodynamique ainsi que l'instrumentation électrique et le comportement moléculaire et atomique des éléments. Pour ce fait, la théorie des milieux continus fait intervenir des connaissances mathématiques plus complexes que l'on nomme tenseur pour les forces et contraintes, et vecteur pour les vitesses et accélérations.

1.2. Objet de la mécanique des milieux continus

La mécanique des milieux continus permet de représenter théoriquement l'état de contraintes et les forces internes qui s'exercent dans un milieu à l'état statique comme à l'état dynamique. Ces corps peuvent être solides ou liquides. Le milieu continu est défini comme un domaine donné à un instant (t) par rapport à un système cartésien (XYZ) ou ($X_1X_2X_3$) où il existe dans son voisinage une distribution de matière dont les propriétés

physiques qui est d'abord la masse volumique (ρ) est une fonction continue et différentiable par rapport au repère de coordonnées. En conséquence, lorsqu'on connaît l'état initial de ce corps, il est recommandé de définir son état ou son mouvement à un autre instant (t_1) et par rapport à un autre système de coordonnées ($X'Y'Z'$) ou ($X_1' X_2' X_3'$), d'où les descriptions Lagrangienne et Eulérienne du corps par rapport au système original et système final respectivement avec une conservation de masse au cours du temps, d'où l'équation de continuité du milieu continu. Les états de description de ce corps se basent essentiellement sur la théorie des tenseurs.

1.3. Les différents axes de la mécanique des milieux continus

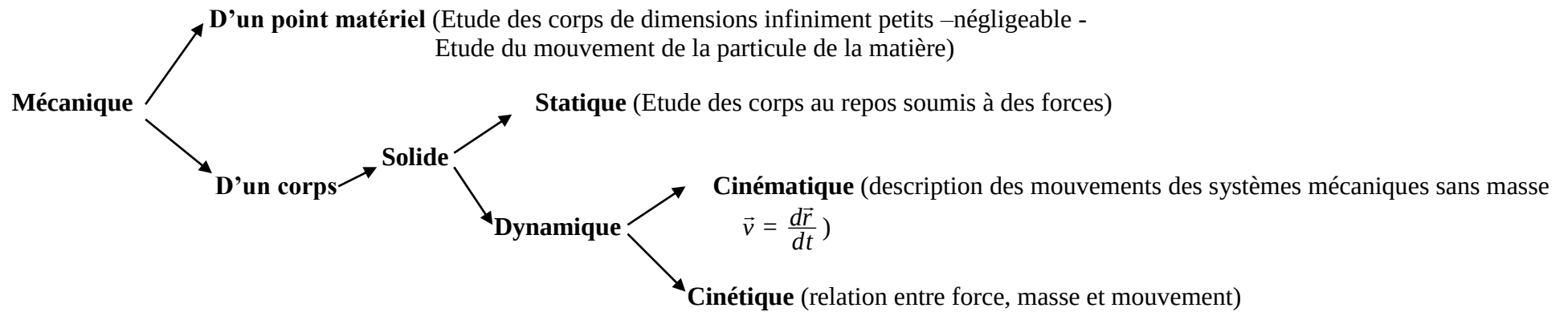
En générale la théorie de la mécanique des milieux continus peut toucher plusieurs domaines dans les sciences technique et physique spécialement la mécanique. Cette dernière peut être divisée en trois thèmes de sciences et technologie suivant les caractéristiques des problématiques considérées et qui se résument en :

- a) La mécanique du point matériel, où les dimensions du corps peuvent être négligées en étudiant son mouvement ou son équilibre.
- b) La mécanique des corps solides où on peut négliger les déformations durant l'étude du mouvement de ces corps ou durant leur équilibre. Cette étude est habituellement subdivisée en deux parties : la statique et la dynamique. La statique consiste en l'étude des conditions d'équilibre des corps au repos soumis à l'action des forces. Tandis que la dynamique étudie les lois de mouvement des corps sous l'action des forces extérieures. Cette dernière traite aussi les méthodes géométriques décrivant les mouvements des systèmes mécaniques sans prendre en considération les forces ou les masses causant ce

mouvement ($v = dr/dt$), c'est à dire la cinématique et elle étudie aussi les relations entre les forces, la masse et le mouvement des corps, c'est à dire la cinétique.

- c) La mécanique des corps déformables qui consiste en l'étude du comportement ou du mouvement des corps solides, liquides ou gaz. La mécanique des corps solides déformables étudie la théorie de l'élasticité et la plasticité de ces corps. Concernant l'élasticité, un corps solide soumis à des forces extérieures se déforme mais sa constitution intérieure revient à sa position initiale quand la force est supprimée (résistance des matériaux). Tandis que pour la plasticité la constitution du corps ne revient pas à sa position initiale une fois que la force est supprimée. Parmi ces matériaux on rencontre souvent les matériaux isotropes, orthotropes et les matériaux composites. Par ailleurs la mécanique des corps liquides déformables étudie la théorie de la mécanique des fluides où leur constitution moléculaire se déforme durant leur déplacement. Dans ce contexte il existe plusieurs types de fluides : les fluides compressibles et incompressibles, la thermodynamique, la gazo-dynamique, l'aérodynamique et les turbulences...

Ceci est schématisé explicitement par le tableau suivant :



Corps déformable :

- **corps élastique** (se déforme mais revient à sa position initiale quand les forces sont supprimées)
- **corps plastique** (ne revient pas à sa position initiale quand les forces sont supprimées)
- **corps transformable** (sa constitution moléculaire et sa forme change durant son déplacement)

Exemples : - Mécanique des Fluides

- **Fluide compressible**
- **Fluide incompressible**
- **Thermodynamique**
- **Gazodynamique**
- **Aérodynamique**
- **Turbulence**

1.4. Le contenu du cours

Le contenu de ce cours se base essentiellement sur une théorie générale des calculs tensoriels afin de surmonter certaines difficultés mathématiques et de donner un large aperçu des principales méthodes de la mécanique de milieux continus, dont la connaissance est indispensable à l'ingénieur. En se basant sur cette théorie tensorielle l'analyse des déformations et des contraintes sont étudiées par rapport à différents repères : repère de référence initial et repère après déformation. En conséquence, le tenseur de déformation de Lagrange (par rapport au système original) et le tenseur d'Euler (par rapport au système après déformation) seront déterminés en équations différentielles tensorielles élémentaires. L'analyse des déplacements des fibres uniques des corps continus seront aussi déterminés et analysés.

Par ailleurs, les tenseurs de déformations et de contraintes dans un milieu élastique seront aussi étudiés et déterminées en se basant sur l'expansion de Taylor. Ces relations contraintes – déformations sont liés par des lois appelées lois de comportement mécanique pour différents matériaux qui sont généralement étudiées de point de vue macroscopique ou macro mécanique en considérons le matériau autant qu'un élément par la mécanique des milieux continus homogènes et anisotropes. Le comportement mécanique de tel matériau est différent en un point, dans toutes les directions le matériau anisotrope ne possède pas alors de plan de symétrie sous l'action d'une sollicitation donnée, un tel solide devient le siège d'un champ de contraintes et de déformation.

Parmi les lois utilisées, la plus utilisée est la loi de Hooke généralisée uni et tridimensionnelle qui est appliquée pour obtenir le tenseur des contraintes en fonction du tenseur de déformation en relation avec le tenseur de rigidité généralisé. Ce dernier caractérise les caractéristiques élastiques du matériau qui sont l'orthotrope, l'anisotrope et l'isotrope .

En général, ce cours contient donc cinq chapitres. Le premier chapitre présente les objectifs principaux de la mécanique des milieux continus et ces applications

dans le domaine de la mécanique. Le deuxième chapitre présente les différents éléments de calcul tensoriel utilisés dans les milieux continus où les principaux théorèmes mathématiques utilisés dans ce cours sont démontrés. Le chapitre trois étudie les tenseurs de déformations de Lagrange et d'Euler en fonction des variables initiales et finales respectivement ainsi qu'en fonction des vecteurs de déplacements. Le chapitre quatre présente des applications pour différents types de corps continus où les différents tenseurs de déformations, de déplacements et de rotations ont été déterminés. Le chapitre cinq consiste en une analyse des contraintes à l'état statique des forces et des moments appliqués sur le corps. Dans le chapitre six, la loi de Hooke généralisée pour les corps uni et tridimensionnel a été déterminée pour différents types de matériaux : orthotropes, anisotropes et parfaitement isotropes.