

# Chapitre III :

## Principes Fondamentaux de la Convection Thermique

### III.1. Définitions

Nous appelons convection thermique la transmission d'énergie-chaleur entre une surface et un fluide se déplaçant le long de la surface. Dans les chapitres précédents nous avons appliqué la convection comme condition aux limites pour les problèmes de conduction avec le coefficient de convection donné.

Dans les chapitres suivants nous discutons les mécanismes de transmission par convection et nous développons des méthodes pratiques pour la détermination du coefficient de convection  $h$ .

La transmission de chaleur par convection est étroitement liée à la mécanique des fluides car le transport de chaleur se fait ici essentiellement par le mouvement des particules du fluide dans le voisinage de la surface de contact.

On peut considérer deux types de convection, en fonction des causes qui produisent le mouvement du fluide: **la convection forcée et la convection libre ou naturelle.**

- **La convection forcée:** se manifeste quand le mouvement du fluide est une conséquence des actions extérieures imposées (pompe, ventilateur, vent, etc...). Dans ce cas, le champ de température est convecté par un écoulement extérieur imposé.
- **La convection libre ou naturelle:** est produite par un mouvement du fluide, engendré par une différence de masse volumique entre les parties froides et chaudes du fluide. La distribution de température engendre son propre mouvement en créant des forces d'Archimède rotationnelles.
- Quand les deux types de convection existent simultanément sans que l'une soit négligeable par rapport à l'autre la convection est dite **mixte**.

### III.2. Régime d'écoulement

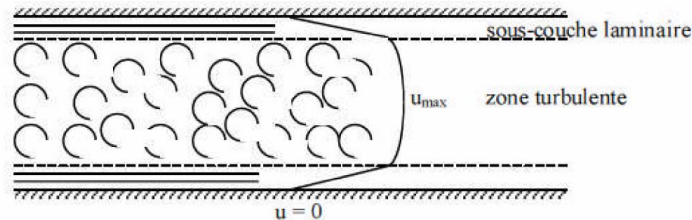
Compte tenu du lien entre le transfert de masse et le transfert de chaleur, il est nécessaire de prendre en compte le régime d'écoulement. Considérons à titre d'exemple l'écoulement d'un fluide dans une conduite :

- **En régime laminaire,** l'écoulement s'effectue par couches pratiquement indépendantes. Entre deux filets fluides adjacents les échanges de chaleur s'effectuent donc :
  - Par conduction uniquement si l'on considère une direction normale aux filets fluides.
  - Par convection et conduction (négligeable) si l'on considère une direction non normale aux filets fluides.



Figure V.1 : Schématisation d'un écoulement laminaire[2]

- **En régime turbulent**, l'écoulement n'est pas unidirectionnel : L'échange de chaleur dans la zone turbulente s'effectue par convection et conduction dans toutes les directions. On vérifie que la conduction moléculaire est généralement négligeable par rapport à la convection et à la « diffusion turbulente » (mélange du fluide dû à l'agitation turbulente) en dehors de la sous-couche laminaire.



**Figure V.2 :** Schématisation d'un écoulement turbulent[2]

### III.3. Expression du flux

Quel que soit le type de convection (libre ou forcée) et quel que soit le régime d'écoulement du fluide (laminaire ou turbulent), le flux de chaleur  $\phi$  est donné par la relation dite loi de Newton :

$$\phi = h \cdot S \cdot \Delta T \quad (\text{III. 1})$$

Le problème majeur à résoudre avant le calcul du flux de chaleur consiste à déterminer le coefficient de transfert de chaleur par convection  $h$  qui dépend de nombreux paramètres :

- Etat des surfaces : qualité (rugueuse, lisse)
- Nature du fluide : viscosité, masse volumique, capacité thermique massique ;
- Température du fluide :  $h$  diminue si  $T$  diminue ;
- Nature de l'écoulement : laminaire, turbulent.

On trouvera dans le tableau IV.1 l'ordre de grandeur du coefficient de transfert de chaleur par convection pour différentes configurations.

**Tableau III.1 :** Ordre de grandeur du coefficient de transfert de chaleur par convection[2]

| Ordres de grandeur du coefficient $h(\text{W/m}^2.\text{K})$ |                |
|--------------------------------------------------------------|----------------|
| ▪ Convection libre (air)                                     | 2 - 25         |
| ▪ Convection libre (eau)                                     | 100 - 900      |
| ▪ Convection forcée (air)                                    | 10 - 500       |
| ▪ Convection forcée (eau)                                    | 100 - 15000    |
| ▪ Convection forcée (huile)                                  | 50 - 2000      |
| ▪ Convection forcée (eau bouillante)                         | 2500 - 25000   |
| ▪ Condens. de vapeur d'eau                                   | 50000 - 100000 |

### III.4. Formulation générale d'un problème de convection :

Résoudre complètement un problème de convection revient à déterminer en tous points et à tout instant les grandeurs caractéristiques du fluide, soit :

- La vitesse  $\vec{U}$  définie par ses trois composantes  $u, v, w$ .
- La masse volumique  $\rho$ .
- La pression  $p$ .

- La température T.

Ce qui permet ensuite d'évaluer les transferts de chaleur. Un nombre suffisant de conditions aux limites et initiales doit être connu.

Pour calculer les six fonctions indiquées ci-dessous, il est nécessaire de disposer de six équations. Pour cela nous allons établir des relations traduisant les principes de conservation de la mécanique et de la thermodynamique. Nous obtiendrons ainsi les équations de conservation de :

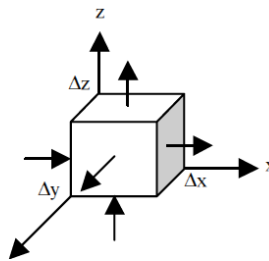
- La masse,
- La quantité de mouvement (équation vectorielle équivalente à 3 équations scalaires),
- L'énergie.

Enfin comme dernière équation nous utiliserons une relation décrivant l'état du fluide.

### III.5. Equations de conservation

- **Equation de conservation de la masse (Equation de continuité):**

Considérons l'écoulement d'un fluide et effectuons un bilan matière sur le système constitué par l'élément parallélépipédique de fluide de côtés  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$  et de masse  $dm$  :



La conservation de la masse dans ce volume entre les instants  $t$  et  $t+dt$  peut s'écrire :

$$\text{Masse entrante} + \text{Masse initiale} + \text{Masse générée} = \text{Masse finale} + \text{Masse sortante}$$

Ce bilan permet d'établir l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \vec{U}] = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{U}) = 0 \quad (\text{III. 2})$$

où :  $\rho$  Masse volumique

$\vec{U}$  Vitesse

- Pour un écoulement permanent ( $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ) :  $\text{div}(\rho \cdot \vec{U}) = 0$
- Pour un écoulement permanent, incompressible ( $\rho = C^{\text{te}}$ ) :  $\text{div}(\vec{U}) = 0$

- **Equations de quantité de mouvement :**

Il s'agit de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \cdot \frac{D\vec{U}}{Dt} = \rho \cdot \vec{F}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}) \quad (\text{III. 3})$$

$\vec{F}_i$  représente la densité massique des forces extérieures (l'exemple le plus courant : la pesanteur, pour laquelle  $\vec{F} = \vec{g}$ )

$\sigma_{ij}$  est le tenseur des contraintes :

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (\text{III. 4})$$

où le premier terme du dernier membre de l'équation (III.4) représente les contraintes qui est associée à la pression statique et le dernier terme définit les composantes du tenseur  $\tau$  des *contraintes visqueuses*.

$$\rho \cdot \frac{DU}{Dt} = \rho \cdot F_i + \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{III. 5})$$

La signification physique de cette équation apparaît clairement:

|                                                 |   |                                |   |                                                   |   |                                            |
|-------------------------------------------------|---|--------------------------------|---|---------------------------------------------------|---|--------------------------------------------|
| Variation de la quantité de mouvement par unité | = | Forces volumiques par unité de | + | Forces associés à la pression par unité de volume | + | Contraintes visqueuses par unité de volume |
|-------------------------------------------------|---|--------------------------------|---|---------------------------------------------------|---|--------------------------------------------|

On adoptera les notations suivantes pour les forces de cisaillement (frottement visqueux) s'appliquant sur les surfaces d'un volume élémentaire  $dx \, dy \, dz$  :

-  $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}$  : composante normale de la force de surface suivant les directions Ox, Oy et Oz.

-  $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$  : composante tangentielle de la force de surface : le 1<sup>er</sup> indice indique la direction normale à la surface considérée, le 2<sup>ème</sup> indice indique la direction dans laquelle la composante agit.

La loi de Newton permet alors d'écrire selon chacune des 3 directions :

$$\begin{cases} \rho \frac{Du}{Dt} = \rho \cdot F_x + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \\ \rho \frac{Dv}{Dt} = \rho \cdot F_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial y} \\ \rho \frac{Dw}{Dt} = \rho \cdot F_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{III. 6})$$

#### -Cas d'un fluide Newtonien

Un fluide est dit newtonien si les contraintes de cisaillement sont proportionnelles aux gradients de vitesse,

on a dans ce cas :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right);$$

$$\tau_{xx} = \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{U} \right); \quad \tau_{yy} = \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{U} \right); \quad \tau_{zz} = \mu \left( 2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{U} \right)$$

En remplaçant le tenseur des contraintes par cette expression dans l'équation générale du mouvement déduite de la loi de Newton on obtient finalement l'équation de Navier-Stokes:

$$\frac{DU}{Dt} = F_i - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \cdot \nabla^2 \mathbf{U} + \frac{1}{3} \nu \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}) \quad (\text{III. 7})$$

Pour un fluide incompressible :  $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$  et on obtient une forme simplifiée de l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{DU}{Dt} = F_i - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \cdot \nabla^2 \mathbf{U} \quad (\text{III. 8})$$

On obtient alors, pour un écoulement incompressible, les équations de Navier-Stokes :

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = \vec{F}_i - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \cdot \Delta \vec{U} \quad (\text{III. 9})$$

Ses équations peuvent s'écrire en coordonnées cartésiennes comme suit :

$$\begin{cases} \frac{Du}{Dt} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{Dv}{Dt} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{Dw}{Dt} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{cases} \quad (\text{III. 10})$$

Avec :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} : \text{Dérivée particulaire}$$

$\rho$ : Densité

$F_x, F_y, F_z$  : Forces extérieures

$P$  : Pression,

$\mu$ : Viscosité dynamique,

$u, v, w$  : Composantes du vecteur vitesse.

### • Equation de conservation de l'énergie

En appliquant le principe de conservation de l'énergie thermique déduit du premier principe de la thermodynamique, l'équation de conservation de l'énergie s'exprime comme suit :

$$\rho \cdot C_p \cdot \frac{DT}{Dt} = \text{div}(\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}) + T\beta \cdot \frac{dp}{dt} + \dot{q} + \psi \quad (\text{III. 11})$$

$\dot{q}$  : sources de chaleur internes : rayonnement thermique, réactions chimiques...

$\psi$  : la fonction de dissipation thermique

$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$  le taux de dilatation volumique à pression constante.

- Dans la plupart des cas usuels  $\lambda$  et  $\mu$  peuvent considérés comme constants.

- Pour les liquides, en général

$$\frac{dp}{dt} \ll C_p \frac{dT}{dt}$$

- Pour les gaz parfaits :  $\beta = \frac{1}{T}$

$$\rho \cdot C_p \cdot \frac{DT}{Dt} = \text{div}(\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}) + \frac{dp}{dt} + q + \psi \quad (\text{III. 12})$$

- Pour un écoulement à dissipation thermique négligeable ( $\psi=0$ ), ou à vitesse modérée pour les gaz  $\frac{dp}{dt}$  est négligeable, sans source de chaleur ( $\dot{q} = 0$ ), l'équation (III.12) se simplifie en :

$$\frac{DT}{Dt} = a \cdot \Delta T \quad (\text{III. 13})$$

Avec :  $a = \frac{\lambda}{\rho \cdot C_p}$  la diffusivité thermique.

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} : \text{Dérivée particulaire de la temperature}$$

### III.6. Analyse dimensionnelle

On peut exprimer les grandeurs physiques en fonction d'un nombre limité de dimensions fondamentales.

Exemples : Vitesse :  $L \cdot T^{-1}$ ; viscosité dynamique :  $M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$ ; force :  $M \cdot L \cdot T^{-2}$

Sur ces exemples on voit que le nombre de dimensions fondamentales est de 3 : Masse  $M$ , Longueur  $L$ , Temps  $T$ .

Ces trois dimensions fondamentales ne sont pas toujours suffisantes. Pour les problèmes de transfert de chaleur, il est nécessaire d'ajouter une 4<sup>ème</sup> dimension : la température  $\theta$  et, lorsque l'échange d'énergie entre grandeurs mécaniques et grandeurs thermiques ne sera pas mesurable, on ajoutera la quantité de chaleur  $Q$  qui sera considérée comme une 5<sup>ème</sup> dimension.

La méthode d'analyse dimensionnelle, qui repose sur le principe de l'homogénéité dimensionnelle des termes d'une équation, est connue sous le nom de théorème de Vaschy-Buckingham ou théorème des groupements  $\pi$ .

Alors toutes les grandeurs physiques sont exprimées dans les dimensions fondamentales suivantes:

- La masse (kg)  $M$
- La longueur (m)  $L$
- Le temps (s)  $T$
- La température (K)  $\theta$

Les variables de base des problèmes de transmission de chaleur et leur dimensions sont données dans le tableau V.2.

| Grandeurs                        | Symbole          | Unité S.I             | Equations aux dimensions                   |
|----------------------------------|------------------|-----------------------|--------------------------------------------|
| Vitesse                          | $U$              | m/s                   | $L \cdot T^{-1}$                           |
| Longueur caractéristique         | $D$              | m                     | $L$                                        |
| Masse volumique de fluide        | $\rho$           | Kg/m <sup>3</sup>     | $M \cdot L^{-3}$                           |
| Viscosité dynamique du fluide    | $\mu$            | Kg/(m.s)              | $M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$              |
| Capacité calorifique massique    | $C$              | J/(kg.K)              | $L^2 \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1}$       |
| Conductivité thermique du fluide | $\lambda$        | W/(m.K)               | $M \cdot L \cdot T^{-3} \cdot \theta^{-1}$ |
| Coefficient d'échange convectif  | $h$              | W/(m <sup>2</sup> .K) | $M \cdot T^{-3} \cdot \theta^{-1}$         |
| Ecart de température             | $T_p - T_\infty$ | K                     | $\theta$                                   |

**Tableau III.2.** Unités et dimensions des variables de la transmission de chaleur par convection

Le théorème de VASCHY-BUCKINGHAM permet de prévoir que la forme la plus générale de la loi physique décrivant le phénomène étudié s'écrira:

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = 0$$

où les  $\pi_i$  sont des groupements sans dimension de la forme:

$$\pi_i = D^a \cdot \lambda^b \cdot U^c \cdot \rho^d \cdot \mu^e \cdot C^f \cdot h^g \cdot (T_p - T_\infty)^i \quad (\text{III. 14})$$

Le nombre de variables indépendantes du problème de transmission de chaleur par convection ( $D, \lambda, U, \rho, \mu, C, h, T_p - T_\infty$ ) est  $n = 8$ .

Selon le théorème de BUCKINGHAM nous pouvons formuler  $N = n - r$  variables adimensionnelles, où ( $r$ ) représente le rang de la matrice défini par les exposants des dimensions des variables données dans le tableau V.3.

**Tableau III.3.** Equations aux dimensions des 8 grandeurs

|                      | D | U  | P  | $\mu$ | $\lambda$ | C  | h  | $T_p - T_\infty$ |
|----------------------|---|----|----|-------|-----------|----|----|------------------|
| Longueur L           | 1 | 1  | -3 | -1    | 1         | 2  | 0  | 0                |
| Masse M              | 0 | 0  | 1  | 1     | 1         | 0  | 1  | 0                |
| Temps T              | 0 | -1 | 0  | -1    | -3        | -2 | -3 | 0                |
| Température $\theta$ | 0 | 0  | 0  | 0     | -1        | -1 | -1 | 1                |

La matrice définie dans le tableau III.1 a le rang  $r = 4$ . Selon BUCKINGHAM nous pouvons donc formuler

$N = 8 - 4 = 4$  paramètres adimensionnels pour les problèmes de transmission de chaleur par convection.

Chaque paramètre ( $\pi_i$ ) sera formulé par des expressions potentielles des variables de base

$$\pi = (L)^a \cdot (L^{+1} \cdot M^{+1} \cdot T^{-3} \cdot \theta^{-1})^b \cdot (L^{+1} \cdot T^{-1})^c \cdot (L^{-3} \cdot M^{+1})^d \cdot (L^{-1} \cdot M^{+1} \cdot T^{-1})^e \cdot (L^{+2} \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1})^f \cdot (M^{+1} \cdot T^{-3} \cdot \theta^{-1})^g \cdot (\theta)^i$$

ou avec les dimensions groupées

$$[\pi] = [M]^{(b+d+e+g)} \cdot [L]^{(a+b+c-3d+e+2f)} \cdot [T]^{(-3b-c-e-2f-3g)} \cdot [\theta]^{(-b-f-g+i)} \quad (\text{III. 15})$$

Pour que  $\pi$  reste adimensionnel, il faut éliminer les dimensions, les exposants entre parenthèses doivent avoir la valeur zéro, ce qui nous définit le système d'équations linéaires suivant

$$\begin{cases} b + d + e + g = 0 \\ a + b + c - 3d - e + 2f = 0 \\ -3b - c - e - 2f - 3g = 0 \\ -b - f - g + i = 0 \end{cases} \quad (\text{III. 16})$$

Afin de déterminer les paramètres adimensionnels  $\pi_i$  nous devons résoudre le système d'équations linéaires (III.1). Pour la définition de chaque paramètre  $\pi_i$  nous pouvons choisir quatre coefficients de manière arbitraire (généralement on donne la valeur zéro) et calculer les autres quatre coefficients par l'équation (V.1).

Nous obtenons par la méthode de l'analyse de dimension pour la convection thermique les paramètres adimensionnels suivants:

#### ✓ Le nombre de Nusselt

$g = 1$  Pour obtenir une loi de la forme  $h = f(\dots)$

$c = d = 0$  Le groupement  $\pi$  trouvé ne dépendra pas de l'énergie cinétique du fluide  $\rho U^2$

$i = 0$  Le groupement  $\pi$  trouvé ne dépendra pas de l'écart de température  $T_p - T_\infty$

Résolution du système déterminant le premier groupement adimensionnel  $\pi$

Avec  $g=1$  et  $c=d=i=0$

$$\begin{cases} b + d + e + g = 0 \\ a + b + c - 3d - e + 2f = 0 \\ -3b - c - e - 2f - 3g = 0 \\ -b - f - g + i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + e = -1 \\ a + b - e + 2f = 0 \\ -3b - e - 2f - 3g = 3 \\ -b - f = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 1, b = -1, e = 0, f = 0$$

$$\pi_i = D^a \cdot \lambda^b \cdot U^c \cdot \rho^d \cdot \mu^e \cdot C^f \cdot h^g \cdot (T_p - T_\infty)^i$$

Avec :  $a = 1, b = -1, c = 0, d = 0, e = 0, f = 0, g = 1, i = 0$

$$\Rightarrow \pi_1 = Nu = \frac{h \cdot D}{\lambda} \quad (\text{III. 17})$$

#### ✓ Le nombre de Reynolds

$$\pi_i = D^a \cdot \lambda^b \cdot U^c \cdot \rho^d \cdot \mu^e \cdot C^f \cdot h^g \cdot (T_p - T_\infty)^i$$

4 des 8 paramètres peuvent être choisis de manière arbitraire

$$b=0, f=0, g=0, i=0$$

$$\begin{cases} b + d + e + g = 0 \\ a + b + c - 3d - e + 2f = 0 \\ -3b - c - e - 2f - 3g = 0 \\ -b - f - g + i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d + e = 0 \\ a + c - 3d - e = 0 \\ -c - e = 0 \\ i = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d=1, c=1, a=1, e=-1$$

Alors

$$a=1, b=0, c=1, d=1, e=-1, f=0, g=0, i=0$$

$$\Rightarrow \pi_2 = Re = \frac{\rho \cdot U \cdot D}{\mu} \quad (\text{III. 18})$$

#### ✓ Nombre de Prandtl Pr

$$\pi_i = D^a \cdot \lambda^b \cdot U^c \cdot \rho^d \cdot \mu^e \cdot C^f \cdot h^g \cdot (T_p - T_\infty)^i$$

4 des 8 paramètres peuvent être choisis de manière arbitraire

$a=0, c=0, g=0, i=0$  de manière à ne conserver que les caractéristiques du fluide :  $\rho, \mu, \lambda, C$

Avec  $a=c=g=i=0$

$$\begin{cases} b + d + e + g = 0 \\ a + b + c - 3d - e + 2f = 0 \\ -3b - c - e - 2f - 3g = 0 \\ -b - f - g + i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + d + e = 0 \\ b - 3d - e + 2f = 0 \\ -3b - e - 2f = 0 \\ -b - f = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b=-1, d=0, e=1, f=1$$

$$\Rightarrow \pi_3 = \text{Pr} = \frac{\mu \cdot C}{\lambda} \quad (\text{III. 19})$$

### III.7. Interprétation des nombres adimensionnels

- **Nombre de Reynolds** : Rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité, caractérise le type de l'écoulement dans une canalisation.

$$\text{Re} = \frac{\rho \cdot U \cdot D}{\mu}$$

$\rho$  : masse volumique du fluide [ $\text{kg/m}^3$ ],

$U$  : vitesse moyenne du fluide [ $\text{m/s}$ ],

$D$  : plus petite dimension géométrique du problème, diamètre  $D_h$  pour une canalisation en [ $\text{m}$ ], largeur  $L$  pour une plaque,

$\mu$  : viscosité dynamique du fluide [ $\text{Pa.s}$ ].

**$D_h$**  : diamètre hydraulique,  $D_h = \frac{4 \cdot S}{P}$  ( $S$  : surface,  $P$  : périmètre)

Tube rectangulaire :  $D_h = \frac{4 \cdot a \cdot b}{2 \cdot (a+b)} = \frac{2 \cdot a \cdot b}{(a+b)}$

Espace annulaire :  $D_h = \frac{4 \cdot [p \cdot (D_2^2 - D_1^2)]}{(p \cdot D_1 + p \cdot D_2)} = D_2 - D_1$

Espace entre deux plans :  $D_h = 2 \cdot b$

- **Nombre de Nusselt** : Rapport de la quantité de chaleur échangée par convection à la quantité de chaleur échangée par conduction.

$$\text{Nu} = \frac{h \cdot D}{\lambda}$$

$h$  : coefficient d'échange convectif en [ $\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$ ],

$\lambda$  : conductivité thermique du fluide en [ $\text{W/m.K}$ ].

- **Nombre de Prandtl** : ce nombre compare l'aptitude du fluide à diffuser la quantité de mouvement par le biais de sa viscosité à son aptitude de diffuser la chaleur par le biais de sa diffusivité thermique.

$$\text{Pr} = \frac{\mu \cdot C_p}{\lambda} = \frac{\nu}{\alpha}$$

**$C_p$**  : capacité thermique massique du fluide en [ $\text{J/kg.K}$ ].

- **Nombre de Stanton ou de Margoulis** : Rapport du flux de chaleur à un flux de chaleur de référence par convection.

$$\text{St} = \text{Ma} = \frac{h}{\rho \cdot U \cdot C_p} = \frac{\text{Nu}}{\text{Re} \cdot \text{Pr}}$$

- **Nombre de Grashof** : Caractérise l'écoulement en convection naturelle (remplace  $\text{Re}$ ), une augmentation de  $\text{Gr}$  traduit une augmentation de l'intensité de la convection naturelle.

$$Gr = \frac{\beta \cdot g \cdot \Delta T \cdot \rho^2 \cdot D^3}{\mu^2}$$

$\beta$  : dilatabilité du fluide en  $[K^{-1}]$ ,

$\Delta T$  : différence de température entre fluide et paroi :  $\Delta T = T_{\text{paroi}} - T_{\text{fluide}}$ .

- **Nombre de Rayleigh** : Caractérise l'écoulement en convection naturelle (remplace Re)

$$Ra = Pr \cdot Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot D^3}{a \cdot \nu}$$

$a = \lambda / (\rho \cdot C_p)$  : diffusivité thermique  $[m^2/s]$ ,

$\nu = \mu / \rho$  : viscosité cinématique du fluide  $[m^2/s]$ .

### III.8. Classification des problèmes de convection :

#### III.8.1. Convection forcée :

Lorsque le champ de vitesse est imposé, le champ de température est totalement dépendant de celui-ci. Cette situation est celle de la convection forcée dans laquelle la vitesse est donc insensible aux variations de température dans le fluide. La température  $T$  obéit alors à une équation de transport:

$$\rho \cdot C_p \cdot \frac{DT}{Dt} = \text{div}(\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}) + \dot{q} \quad (\text{III. 20})$$

Avec

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z}$$

Si la distribution de vitesse n'est pas connue, on peut la chercher par résolution des équations de Navier-Stokes.

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}p} + \nu \cdot \Delta \vec{U} \quad (\text{III. 21})$$

En choisissant les variables adimensionnelles suivantes:

$$T^* = \frac{T - T_{\text{ref}}}{\Delta T}; U^* = \frac{U}{U_{\text{ref}}}; x^* = \frac{x}{L_{\text{ref}}}; p^* = \frac{p}{\rho \cdot U_{\text{ref}}^2}; t^* = \frac{t}{L_{\text{ref}}/U_{\text{ref}}}$$

l'équation de la vitesse devient:

$$\frac{D\vec{U}^*}{Dt^*} = -\vec{\nabla} p^* + \frac{1}{Re} \Delta \vec{U}^* \quad (\text{III. 22})$$

Où le nombre de Reynolds est tel que

$$Re = \frac{U_{\text{ref}} \cdot L_{\text{ref}}}{\nu}$$

La solution obtenue peut ensuite être introduite dans l'équation de  $T$  qui, en écriture adimensionnelle, devient:

$$\frac{\rho \cdot C_p \cdot \Delta T}{L_{ref}/U_{ref}} \cdot \frac{DT^*}{Dt^*} = \frac{\lambda \cdot \Delta T}{L_{ref}^2} \Delta T^* + \dot{q}^* \quad (III. 23)$$

soit encore:

$$\frac{DT^*}{Dt^*} = \frac{1}{Pe} \Delta T^* + \dot{q}^*$$

ou  $Pe$  désigne le nombre de Péclet:  $Pe = \frac{U_{ref} \cdot L_{ref}}{a}$

avec  $a = \frac{\lambda}{\rho \cdot C_p}$  diffusivité thermique du fluide. Le terme  $q^*$  est tel que  $\dot{q}^* = \frac{\dot{q} \cdot L_{ref}}{U_{ref} \cdot \Delta T \cdot \rho \cdot C_p}$

### III.8.2. La convection naturelle :

L'écoulement du fluide est produit par des forces d'Archimède dues aux variations locales de la masse volumique. Il n'y a pas de dispositif mécanique mettant le fluide en mouvement. L'échelle de vitesse  $u_0$  n'est plus imposée, mais dépend des autres échelles. Les problèmes dynamique et thermique sont couplés et doivent être résolus simultanément.

L'utilisation des mêmes grandeurs adimensionnelles transforme l'équation de Navier-Stokes ainsi:

$$\frac{D\vec{U}^*}{Dt^*} = -\vec{\nabla} p^* + \frac{1}{Re} \Delta \vec{U}^* + \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot L_{ref}}{U_{ref}^2} T^* \quad (III. 24)$$

Il reste toutefois à déterminer  $U_{ref}$  qui n'est pas imposée par un mécanisme externe mais par la convection naturelle elle-même.

Si l'écoulement est rapide ( $Re, Gr \gg 1$ ), on peut postuler un équilibre entre les forces d'inertie et la poussée d'Archimède soit:

$$\frac{\rho \cdot U_{ref}^2}{L_{ref}} \approx \rho g \beta \Delta T \Rightarrow U_{ref} = \sqrt{g \beta \Delta T L_{ref}}$$

de sorte que Navier-Stokes devient:

$$\frac{D\vec{U}^*}{Dt^*} = -\vec{\nabla} p^* + \frac{1}{Gr^{1/2}} \Delta \vec{U}^* - \vec{g}^* \cdot T^* \quad (III. 25)$$

ou le nombre de Grashof est défini par:

$$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot L_{ref}^3}{\nu^2}$$

L'équation de la température devient alors:

$$\frac{DT^*}{Dt^*} = \frac{1}{Gr^{1/2} \cdot Pr} \Delta T^* + \dot{q}^* \quad (III. 26)$$

ou le nombre de Prandtl est défini par

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$$

Si l'écoulement est lent (faible Grashof et Reynolds), un choix judicieux de l'échelle de vitesse consiste à équilibrer les forces visqueuses et d'Archimède ce qui donne

$$\mu \frac{U}{L^2} \approx \rho \cdot g \cdot \Delta T$$

L'échelle de vitesse est alors:

$$U_{\text{ref}} = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot L^2}{\nu}$$

### III.8.3. Convection mixte:

Lorsque la convection naturelle se superpose à la convection forcée, la question se pose de savoir si un des deux champs de vitesse peut être négligé ou si les deux doivent être pris en considération.

On peut par exemple estimer le rapport des deux vitesses attendues pour chacun des modes de convection pris isolément soit  $\sqrt{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot L_{\text{ref}}}$  pour la convection naturelle et  $u_0$  pour la convection forcée. On forme ainsi le nombre de Richardson:

$$R_i = \frac{g \beta \Delta T \cdot L_{\text{ref}}}{u_0^2} = \frac{\text{forces d'Archimède}}{\text{forces d'inertie}}$$

Le cas de la convection forcée correspond à  $R_i \ll 1$ . Le problème dynamique est alors indépendant du problème thermique : les deux problèmes sont découplés. On doit résoudre d'abord le problème dynamique, puis connaissant le champ des vitesses, résoudre le problème thermique.

Si  $R_i$  n'est pas très petit devant 1, les forces d'Archimède ne sont pas négligeables. Il s'agit de la convection mixte et les problèmes dynamique et thermique sont couplés.

Si  $R_i \gg 1$ , alors les forces d'Archimède sont dominantes. Il s'agit de la convection naturelle et les problèmes dynamique et thermique sont aussi couplés.