

Degré de liberté (DDL)

1/ Introduction

Degré de liberté est une notion qui permet à un système d'évoluer librement selon différentes variables indépendantes. Cette notion est essentiellement utilisée en mécanique, mais aussi en physique, en chimie et en mathématique.

Un système mécanique est en général soumis à un certain nombre d'actions tendant à assurer son équilibre ou à modifier son mouvement, par rapport à un repère d'observation.

2/ Mobilités fonctionnelles d'un mécanisme

Un mécanisme est toujours modélisable. À partir de son modèle, l'étude peut mettre en évidence :

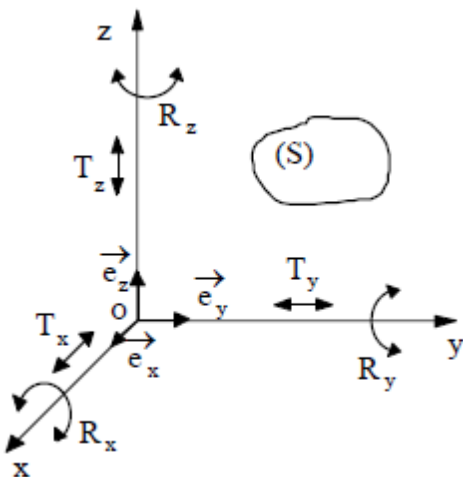
- Les **efforts** mis en jeu, c'est le domaine de la **statique**,
- Les **mouvements relatifs** de ses composants, c'est le domaine de la **cinématique**,
- Les **puissances transmises**, c'est le domaine de la **dynamique**.

La cinématique est l'étude des mouvements possibles entre solides sans tenir compte des causes qui les provoquent.

En cinématique un solide est considéré comme indéformable. Il peut correspondre à une **seule pièce** ou à un groupe de pièces qui n'ont aucun mouvement les uns par rapport aux autres au cours du fonctionnement normal. Ce groupe de pièces est un sous-ensemble cinématiquement lié.

3/ DEGRÉS DE LIBERTÉ

3.1 Décomposition du déplacement d'un solide dans un repère



Un solide (S) en déplacement quelconque dans l'espace affine est repéré par un repère $R = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Son déplacement peut se décomposer, dans un ordre quelconque, en **six déplacements élémentaires** qui sont :

- Rotation R_x autour de $(O, \vec{e}_x)$, rotation R_y autour de $(O, \vec{e}_y)$, rotation R_z autour de $(O, \vec{e}_z)$,
- Translation T_x suivant $(O, \vec{e}_x)$, translation T_y suivant $(O, \vec{e}_y)$, translation T_z suivant $(O, \vec{e}_z)$.

Degrés de liberté d'un solide (ddl) : par définition, les ddl d'un solide sont *ces déplacements élémentaires*

Dans l'espace : **six** ddl : **trois** rotations
trois translations

Dans le plan : **trois** ddl : **une** rotation
deux translations

3.2 Degrés de liberté d'une liaison - degré de liaison

Une liaison élémentaire entre deux solides S_1 et S_2 est créée par le **contact** d'une surface associée au solide S_1 sur une surface associée à S_2 . Pour caractériser la nature de leur liaison, il faut étudier les mouvements relatifs de S_1 par rapport à S_2 .

Définitions :

- Le degré de liberté (ddl) d'une liaison est le nombre de déplacements élémentaires indépendants autorisés par cette liaison.
- Par opposition, le degré de liaison (ddl_n) est le nombre de déplacements élémentaires interdits.

Le degré de liberté est donc une variable qui peut prendre **deux états** auxquels on peut associer :

- Le chiffre **0** lorsque le degré de liberté est **impossible**.
- Le chiffre **1** lorsque le degré de liberté est **possible**.

A un degré de liberté supprimé correspond un degré de liaison :

$$\text{degré de liberté (ddl)} + \text{degré de liaison (ddl}_n\text{)} = 6$$

4/ DDL des Chaînes cinématiques

❖ Soient :

- n_B , le nombre de corps

- n_J , le nombre de joints
- n_L , le nombre de boucles

On montre aisément que le nombre de boucles cinématiques est lié au nombre de corps et de joints par la formule :

$$n_L = n_J - n_B$$

- ❖ En effet si la chaîne est ouverte on remarque aisément que le nombre de corps = nombre de joints. Pour refermer une boucle, il faut ajouter un nouveau joint. Le nombre de boucles est donc égal au nombre de joints en surplus par rapport au nombre de corps.

4.1 Indice de mobilité et formule de Grübler

- ❖ Indice de mobilité M :
 - ✓ Nombre de paramètres libres pour déterminer la configuration du mécanisme
- ❖ Formule de Grübler :

Soient

- n_B , le nombre de corps
- n_J , le nombre de joints
- n_L , le nombre de boucles
- f_j les nombres de ddl de l'articulation j , et $C_j = 6 - f_j$ la classe du joint j

Le nombre de ddl d'une chaîne cinématique est donné par :

$$M = 6n_B - \sum_{j=1}^{n_J} (6 - f_j) \qquad M = 6(n_B - n_J) + \sum_{j=1}^{n_J} f_j$$

- ✓ Le nombre de boucles est donné par : $n_L = n_J - n_B$

- ✓ L'indice de mobilité s'écrit alors :

$$M = \sum_{j=1}^{n_J} f_j - 6n_L$$

Attention !

- Dans le cas d'un mécanisme plan ou sphérique, on a seulement 3 dls et le nombre de ddl d'une chaîne cinématique est donné par :

$$M = 3(n_B - n_J) - \sum_{j=1}^{n_J} f_j \qquad M = \sum_{j=1}^{n_J} f_j - 3n_L$$

- La formule de Grübler peut être erronée pour certaines structures complexes, si les contraintes cinématiques dans les boucles sont redondantes.

Exemple : sous-ensemble plan dans un mécanisme tridimensionnel