

Structural Dynamics exam correction

exercice 1

Solution :

Diagramme du corps libre

Application du théorème cinétique

$$\sum \mathcal{M}_{/\Delta} = I_{\Delta} \ddot{\theta}$$

$$-f_r \times \frac{l}{2} - f_a \times \frac{l}{2} - mg \frac{l}{2} \sin \theta = I_{\Delta} \ddot{\theta}$$

$$f_r = k \frac{l}{2} \sin \theta = k \frac{l}{2} \theta$$

$$f_a = c \frac{d}{dt} \left(\frac{l}{2} \sin \theta \right) = c \frac{l}{2} \dot{\theta} \cos \theta = c \frac{l}{2} \dot{\theta}$$

$$I_{\Delta} = m \left(\frac{l}{2} \right)^2$$

$$m \left(\frac{l}{2} \right)^2 \ddot{\theta} + c \frac{l}{2} \dot{\theta} \times \frac{l}{2} + k \frac{l}{2} \frac{l}{2} \theta + mg \frac{l}{2} \theta = 0$$

Equation de mouvement

$$ml\ddot{\theta} + cl\dot{\theta} + (kl + 2mg)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{m} \dot{\theta} + \left(\frac{k}{m} + \frac{2g}{l} \right) \theta = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{2g}{l}} \text{ et } 2\xi\omega_n = \frac{c}{m}$$

$$\ddot{\theta} + 2\xi\omega_n \dot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0$$

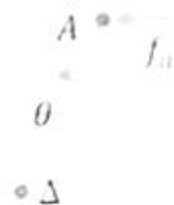
Décroissement logarithmique

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_0}{x_n} = \frac{1}{5} \ln 2$$

$$\delta = \xi \omega_n T_d = \frac{2\xi\omega_n T_d}{2} = \frac{1}{2} \frac{c}{m} T_d$$

Coefficient d'amortissement

$$c = \frac{2m\delta}{T_d} = \frac{2m \ln 2}{T_d \cdot 5} = \frac{2 \times 0.5}{5 \times 0.1} \ln 2 = 1.386 \text{ kgs}^{-1} \equiv (\text{Nsm}^{-1})$$



Solution:

$$1. T = T_{m_1} + T_{m_2} = \frac{1}{2} m_1 R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 R^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) R^2 \dot{\theta}^2 \quad D = \frac{1}{2} k R^2 \theta^2$$

$$U = U_{m_1} + U_{m_2} + U_k = m_1 g R \theta + m_2 g R \theta + \frac{1}{2} k (R \theta - R \theta)^2$$

$$= \frac{1}{2} k R^2 \theta^2 \quad (\text{La condition d'équilibre élimine tous les termes linéaires.})$$

$$2. \mathcal{L} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) R^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k R^2 \theta^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = - \frac{\partial D}{\partial \theta} + FR \Rightarrow \theta + \frac{a}{m_1 + m_2} \ddot{\theta} + \frac{k}{m_1 + m_2} \theta = \frac{F_0}{(m_1 + m_2) R} \cos \Omega t$$

3. L'équation est de la forme $\ddot{\theta} + 2\lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \left(\frac{F_0}{a} \right) \cos \Omega t$, $\lambda = \frac{a}{2(m_1 + m_2)}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m_1 + m_2}$, $a = (m_1 + m_2) R$
 La solution permanente est $\theta = A \cos(\Omega t + \phi)$. Utilisons la représentation complexe pour trouver A et ϕ .

$$\begin{aligned} (F_0/a) \cos \Omega t &\rightarrow (F_0/a) e^{j\Omega t} \\ \theta = A \cos(\Omega t + \phi) &\rightarrow \underline{\underline{A}} e^{j\Omega t} \end{aligned}$$

$$\text{On obtient } -\Omega^2 \underline{\underline{A}} e^{j\Omega t} + 2\lambda \Omega \underline{\underline{A}} e^{j\Omega t} + \omega_0^2 \underline{\underline{A}} e^{j\Omega t} = (F_0/a) e^{j\Omega t} \Rightarrow \underline{\underline{A}} = \frac{F_0/a}{-\Omega^2 + \omega_0^2 + 2j\lambda\Omega}$$

$$\text{L'amplitude est } A = \frac{F_0/a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}} \quad \text{La phase est donnée par } \tan \phi = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$4. \text{ La pulsation de résonance est } \Omega_R \text{ telle que } \left. \frac{\partial A}{\partial \Omega} \right|_{\Omega_R} = 0 \Rightarrow \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$$

$$5. \text{ Pour un amortissement faible } \lambda \ll \omega_0: \Omega_{c1} \approx \omega_0 - \lambda, \quad \Omega_{c2} \approx \omega_0 + \lambda \quad B = \Omega_{c2} - \Omega_{c1} = 2\lambda$$

$$6. \text{ A.N: } \Omega_R \approx 1.82 \text{ rad/s}, \quad B \approx 3.10^{-2} \text{ Hz}, \quad \text{Le facteur de qualité est } Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{\omega_0}{B} \approx 60.9$$

1- L'équation matricielle d'un système non amorti s'écrit :

- A. $[K]\{x\} = \{F\}$
 B. $[M]\{\ddot{x}\} - [K]\{x\} = 0$
 C. $[C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = 0$
 D. $[M]\{x\} = 0$

B

2- Le problème aux valeurs propres associé est :

- A. $\det([M] - \omega[K]) = 0$
 B. $\det([K] - \omega^2[M]) = 0$
 C. $\det([C] - \omega[M]) = 0$
 D. $\det([K] + [M]) = 0$

B

3- Deux modes propres ϕ_i et ϕ_j ($i \neq j$) vérifient :

- A. $\phi_i^T \phi_j = 1$
 B. $\phi_i^T [M] \phi_j = 0$
 C. $\phi_i = \phi_j$
 D. $[K] \phi_i = 0$

B

4- La diagonalisation du système par transformation modale permet :

- A. D'augmenter le nombre d'équations
 B. De découpler les équations du mouvement
 C. De supprimer la masse
 D. De rendre le système non linéaire

B

5- Dans l'amortissement de Rayleigh :

- A. $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$
 B. $[C] = [M][K]$
 C. $[C] = \alpha[K]$
 D. $[C] = 0$

A

6- La condition pour que les modes restent orthogonaux avec amortissement est :

A. Amortissement quelconque

- B. Amortissement proportionnel
C. Amortissement nul uniquement
D. Amortissement non linéaire

B

7- La réponse en régime forcé harmonique présente une résonance lorsque :

- A. $\omega = 0$
B. $\omega = \omega_{11}$
C. $\omega \rightarrow \infty$
D. $\omega = 2\omega_{11}$

B

8- La matrice de masse est généralement :

- A. Non symétrique
B. Symétrique définie positive
C. Nulle
D. Diagonale obligatoirement

B

9- La superposition modale est valide si :

- A. Le système est non linéaire
B. Le système est linéaire
C. Le système est instable
D. Il n'y a pas de masse

B

10- Le vecteur modal est défini à un facteur :

- A. Additif
B. Multiplicatif
C. Exponentiel
D. Nul

B

11- Dans la base modale, les matrices deviennent :

- A. Pleines
B. Non définies
C. Diagonales
D. Nulles

C

12- L'énergie totale dans un système non amorti est :

- A. Décroissante
B. Croissante
C. Constante
D. Nulle

C