

Rappel mathématique et les méthodes de fiabilité

1 Introduction

Il est toujours possible d'associer à une variable aléatoire une probabilité et définir ainsi une loi de probabilité. Lorsque le nombre d'épreuves augmente indéfiniment, les fréquences observées pour le phénomène étudié tendent vers les probabilités et les distributions observées vers les distributions de probabilité ou loi de probabilité. Une loi de probabilité est un modèle représentant "au mieux", une distribution de fréquences d'une variable aléatoire.

2 Lois de probabilité utilisées en fiabilité

On distingue deux types :

- Lois discrètes
- Lois continues

2.1. Lois discrètes

Une loi est dite discrète si elle prend ses valeurs dans $\mathbf{N}$ c'est à dire des valeurs entières comme par exemple celle qui compte le nombre de pannes.

Parmi les lois discrètes on peut citer :

1. Loi Uniforme
2. Loi de Bernoulli
3. Loi Binomiale
4. Loi Binomiale négative
5. Loi Géométrique
6. Loi Hypergéométrique
7. Loi de Poisson

2.1.1 Loi uniforme

Une distribution de probabilité suit une loi uniforme lorsque toutes les valeurs prises par la variable aléatoire sont équiprobables. Si n est le nombre de valeurs différentes prises par la variable aléatoire. La fonction de fiabilité est définie par l'expression suivante :

$$P(x = x_i) = \frac{1}{n}$$

Avec les paramètres de signification :

n : est le nombre de valeurs différentes prises par la variable aléatoire.

2.1.2 Loi de Bernoulli

Soit un univers constitué de deux éventualités, S pour succès et E pour échec = $\{E, S\}$ sur lequel on construit une variable aléatoire discrète, « nombre de succès » telle que au cours d'une épreuve :

Si (S) est réalisé, $X = 1$

➤ Si (E) est réalisé, $X = 0$

L'expression de la fonction de fiabilité s'écrit :

$$P(X = 0) = q$$

$$P(X = 1) = p$$

$$(p + q = 1)$$

2.1.3 Loi binomiale

Décrite pour la première fois par Isaac Newton en 1676 et démontrée pour la première fois par le mathématicien suisse Jacob Bernoulli en 1713, la loi binomiale est l'une des distributions de probabilité les plus fréquemment rencontrées en statistique appliquée.

En mathématiques, une loi binomiale de paramètres n et p est une loi de probabilité qui correspond à une expérience aléatoire à deux issues possibles, généralement dénommées respectivement « succès » et « échec », la probabilité d'un succès étant p .

Sa fonction de probabilité est :

$$P(k) = P(x = k) = C_k^n p^k q^{n-k}$$

$$C_k^n = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

Avec les paramètres de signification :

- $(n \geq 0)$: Nombre d'épreuves.
 - $(0 \leq p \leq 1)$: probabilité de succès.
- et $q = 1 - p$.

2.1.7. Loi de Poisson

Une variable aléatoire x suit une loi de « Poisson » si elle peut prendre les valeurs entières 0, 1, 2, 3, ..., n . La probabilité pour que x soit égal à k est :

$$P(x = n) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^n}{n!}$$

λ : paramètre de la loi (constante positive).

2.1.7.1 Relation de Poisson

La probabilité pour qu'un événement se produise est d'autant plus vraie que la population concernée est grande et le nombre d'évènement petit. Par conséquence la loi de Poisson servira à étudier les phénomènes rares, tels que les accidents, pannes, défauts de fabrication où la probabilité p est très faible ($p < 0.05$). Elle peut également dans certaines conditions être définie comme limite d'une loi binomiale.

La probabilité de constater un certain nombre de pannes (n) dans le temps (t) et seulement (n) pannes est :

$$P(x = n) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^n}{n!}$$

- ✓ L'espérance mathématique est : λt .
- ✓ La variance : λt .
- ✓ L'écart type $\sigma = \sqrt{\lambda t}$.

2.2 Les lois continues

1. La loi du Khi deux
2. La loi de Birnbaum-Saunders
3. La loi Gamma
4. Loi Inverse Gamma
5. La loi logistique
6. La loi log-logistique
7. La Loi de Cauchy
8. La loi de Student
9. La loi Bêta
10. La loi exponentielle
11. La loi de Fisher
12. La Loi normal
13. La loi Log normale
14. La loi de Weibull

2.2.1 La loi de Pearson ou loi de χ^2 (Khi deux)

La loi Khi-deux, ou loi de Pearson, ne sert pas à modéliser directement la fiabilité, mais essentiellement au calcul des limites de confiance lors des estimations par intervalle de confiance. Elle est caractérisée par un paramètre positif α appelé degrés de liberté et définie que pour des valeurs positives.

Sa fonction de probabilité :

$$\Pr((\chi^2 < \alpha) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\alpha} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} dt$$

2.2.2 La loi Gamma

La loi gamma est la loi de l'instant d'occurrence du $\alpha^{\text{ème}}$ événement dans un processus de Poisson. Soit $\{T\}$ le vecteur représentant les durées inter événements (les temps entre les défaillances successives d'un système). Si ces durées sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre β , alors le temps cumulé d'apparition de ces défaillances suit une loi Gamma de paramètre (α, β) . Sa densité de probabilité s'écrit:

Sa fonction de densité de probabilité est :

$$f(t) = \frac{\beta^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\beta t}}{\Gamma(\alpha)} \quad t \geq 0, \alpha \geq 1 \text{ et } \beta \geq 0$$

2.2.3 La loi normale

Cette loi est aussi appelée loi de Gauss, en l'honneur du grand mathématicien allemand Karl Friedrich Gauss (1777-1855).

La loi normale est la loi statistique la plus répandue et la plus utile, elle est utilisée afin d'approcher des probabilités associées à des variables aléatoires binomiales possédant un paramètre 'n' très grand. Elle représente beaucoup de phénomènes aléatoires. De plus, de nombreuses autres lois statistiques peuvent être approchées par la loi normale, tout spécialement dans le cas des grands échantillons.

Sa fonction de fiabilité est :

$$n(t) = \frac{n}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Avec les paramètres de signification :

- μ : La moyenne.

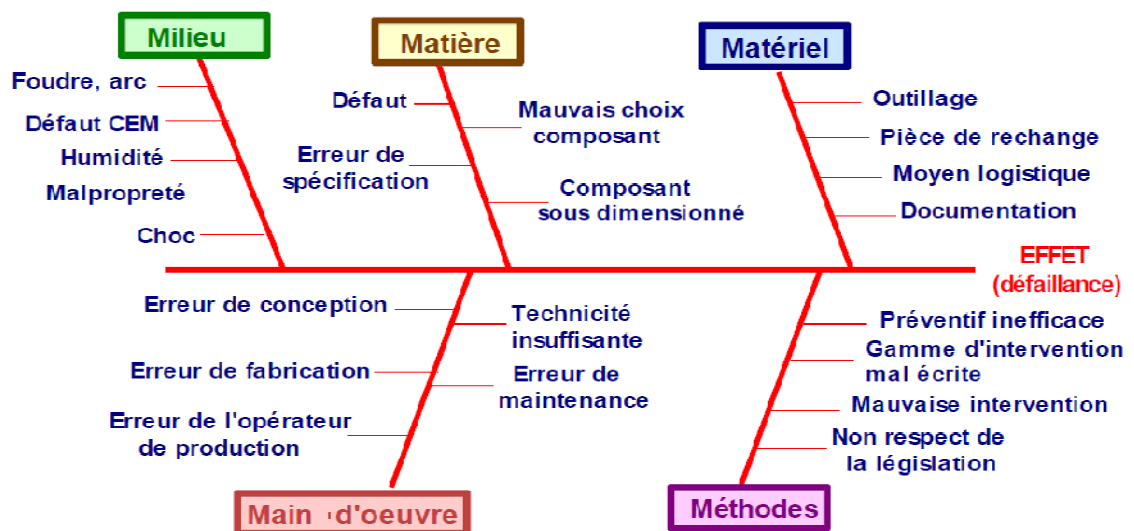
- σ : L'écart type.
- n : Le nombre totale d'individus dans l'échantillon.
- $n(x)$: Le nombre d'individus pour lesquels la grandeur analysée a la valeur x .

3. Méthodes de fiabilité

3.1 Méthode ISHIKAWA:

Diagramme d'Ishikawa ou Le diagramme de causes à effet, Cet outil se présente sous la forme d'arêtes de poisson classant les catégories de causes inventoriées selon la loi des 5M :

- **Matière** : les différents consommables utilisés, matières premières...
- **Milieu** : le lieu de travail, son aspect, son organisation physique...
- **Méthodes** : les procédures, le flux d'information...
- **Matériel** : les équipements, machines, outillages, pièces de rechange...
- **Main d'œuvre** : les ressources humaines, les qualifications du personnel...



3.2 Méthode opérationnelle et prévisionnelle:

3.2.1 Fiabilité prévisionnelle

consiste à prévoir la fiabilité dès le début du projet, à partir d'une analyse qualitative (APR, AMDEC, ...) et/ou quantitative (AdD, DF, ...). Elle s'exécute dès la première phase du projet sous forme de prévisions succinctes, puis de façon plus détaillée lorsque la définition des composants est réalisée. Elle permet ainsi de prendre des orientations optimales en matière de conception.

3.2.1 Fiabilité opérationnelle:

consiste à évaluer la fiabilité en service à partir de données du retour d'expérience (REX). Elle se pratique dès les premières mises en service et permet ainsi de corriger des défauts de conception et de processus. $R(t)$ représente la fiabilité au cours du temps.

3.3 Modèle mathématique de la fiabilité

La détermination de la fiabilité d'un système électronique, mécanique ou autre nécessite tout d'abord de connaître la loi de la fiabilité (ou la loi de défaillance) de chacun des composants intervenant dans le système.

Ceci est simple pour certains types de systèmes tels que les systèmes électroniques, or ce n'est pas le cas pour des systèmes mécaniques à cause de la complexité de la structure du système étudié. Les systèmes mécaniques sont des ensembles d'éléments technologiques liés par des relations statiques et dynamiques assez complexes.

3.3.1 APPROCHE DE LA FIABILITE PAR LES PROBABILITES :

Définition: selon la NF X 06 – 501 : la fiabilité est la caractéristique d'un dispositif exprimée par la probabilité que ce dispositif accomplisse une fonction requise dans des conditions d'utilisation données et pour une période de temps déterminée.

1. Probabilité : c'est le rapport $\frac{\text{Nombre cas favorables}}{\text{Nombre cas possible}}$

On notera **$R(t)$ la probabilité de fonctionnement à l'instant t** . Le symbole R provient de l'anglais Reliability. On notera $F(t)$ la fonction définie par $F(t)=1-R(t)$. C'est la probabilité complémentaire. **$F(t)$ est la probabilité de défaillance à l'instant t . $F(t)+R(t)=1$.**

2. Fonction requise : ou accomplir une mission ou rendre le service attendu. La définition de la fonction requise implique un seuil d'admissibilité en deçà duquel la fonction n'est plus remplie.

3. Conditions d'utilisation : définition des conditions d'usage, c'est à dire l'environnement et ses variations, les contraintes mécaniques, chimiques, physiques, etc. Il est évident que le même matériel placé dans 2 contextes de fonctionnement différents n'aura pas la même fiabilité.

4. Période de temps : définition de la durée de mission T en unités d'usage. Ex : on se fixe un minimum $R(T_m) = 0,9$ pour une durée de mission $T_m = 8000$ heures ; à tout instant T_i de la mission est associée une fiabilité $R(t_i)$.

Exemple : moteur de voiture préparé pour les 24 heures du Mans :

- Probabilité : c'est celle de terminer ; fiabilité requise=0,98.

- Fonction requise : 200 km/h de moyenne (seuil minimal).
- Conditions d'utilisation : de jour, de nuit, avec de la pluie, n ravitaillements, etc.
- Période de temps : au bout de 24 heures (durée de la mission) .

3.3.2 EXPRESSIONS MATHÉMATIQUES :

A – Fonctions de distribution et de répartition

Notion de variable aléatoire : on appelle variable aléatoire X une variable telle qu'à chaque valeur x de la VA X on puisse associer une probabilité F(x). Une VA peut être :

- Continue : intervalle de temps entre 2 défaillances consécutives
- Discrète : nombre de défaillance sur un intervalle de temps

Soit une loi de probabilité relative à une VA continue T. Cette loi est caractérisée par sa fonction de distribution (appelée aussi densité de probabilité) f(t) et par sa fonction de répartition F(t) telles que :

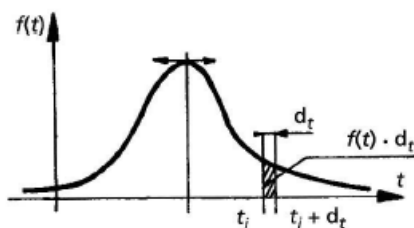
$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{P(t < T < t+dt)}{dt}$$

La fonction F(t) représente la probabilité qu'un événement (défaillance) survienne à l'instant T dans l'intervalle [0,t]

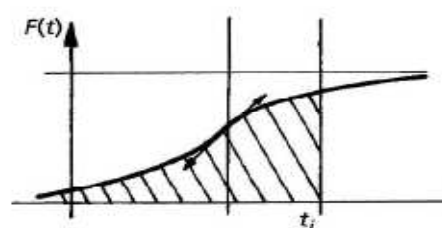
$$F(t) = P(T < t).$$

$$\text{Comme : } f(t) \cdot dt = P(t < T < t + dt) \Rightarrow F(t) = \int_{-\infty}^t f(t) dt = P(T < t).$$

si la variable aléatoire est discrète, l'expression devient : $F(t_n) = \sum_0^n f(t_i) = P(T < t_n)$



Fonction de distribution



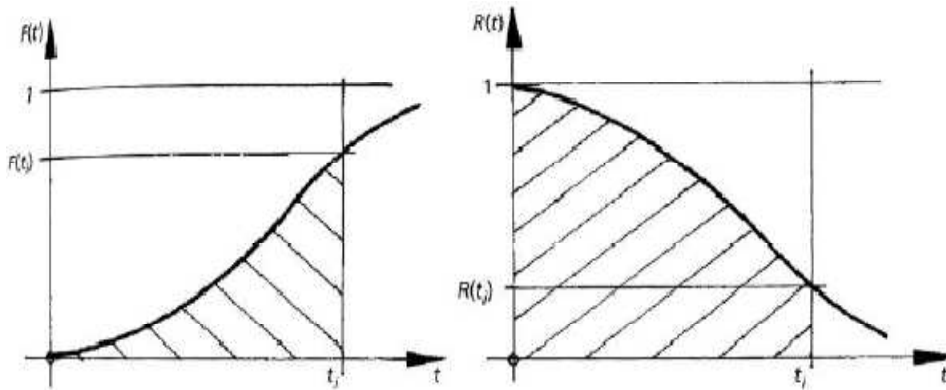
Fonction de répartition

B – Application à la fiabilité :

Un dispositif mis en marche la 1ère fois à t=0 tombera inexorablement en panne à un instant T non connu a priori. T (date de la panne), est une variable aléatoire de la fonction de répartition F(t).

- $F(t) \rightarrow$ probabilité de défaillance avant un instant t
- $R(t) \rightarrow$ probabilité de bon fonctionnement à t
- $R(t) + F(t) = 1$

- $\int_0^t f(t)dt + \int_t^\infty f(t)dt = 1$



C – Taux de défaillance

On définit le taux de défaillance de la manière suivante :

$$\lambda(t) = \frac{\text{Nombre de défaillants sur intervalle de temps}}{\text{Nombre de survivants au début de la période} \times \text{Intervalle de temps}}$$

On définit :

- N0 le nombre initial de dispositifs
- Ns(t) est le nombre de dispositifs survivants à l'instant t
- Ns(t + Δt) est le nombre de dispositifs survivants à l'instant t + Δt

Au niveau d'une défaillance, 2 cas peuvent se produire :

- Les défaillants sont remplacés
- Les défaillants ne sont pas remplacés

Les défaillants sont remplacés : Ns(t) sera toujours égal à N0 : On nomme C(Δt) le nombre de défaillants durant Δt. D'après la formule générale du taux de défaillance, on a :

$$\lambda(t) = \frac{C(\Delta t)}{N0. \Delta t}$$

Les défaillants ne sont pas remplacés : $\lambda(t) = \frac{Ns(t) - Ns(t + \Delta t)}{Ns(t). \Delta t}$

Ce taux de défaillance est une valeur moyenne sur une période Δt connue. Or, au même titre que F(t) et R(t), il est intéressant de connaître l'évolution de λ(t) au cours du temps.

C'est le taux de défaillance instantané : On fait tendre Δt → dt et (Ns(t) – Ns(t + Δt)) → dN.

dN sera précédé du signe « - » car il y a moins de survivants à (t + Δt) qu'à t.

$$\lambda(t) = \frac{-dN}{N(t). dt} \Rightarrow \lambda(t). dt = \frac{-dN}{N(t)}$$

λ(t). dt est appelé probabilité conditionnelle de défaillance sur [t, t+dt].

Applications

Cas N°1 : les défectueux sont remplacés

Une étude a été menée sur 70 véhicules pendant une période allant de 80000km à 90000km. 41 défaillances ont été réparées. Déterminer le taux de défaillance pour cette période.

$$\lambda(t) = \frac{C(\Delta t)}{N_0 \cdot \Delta t} = \frac{41}{70 \times (90000 - 80000)} = 0.585 \cdot 10^{-4} \text{pannes/km}.$$

Cas N°2 : les défectueux ne sont pas remplacés

On teste un lot de 50 électrovannes soumises en continu à 8 impulsions par minute. A la 50^{ème} heure, il en reste 33. A la 60^{ème} heure, il en reste 27. Déterminer le taux de défaillance sur cette classe, par heure et par impulsion.

$$\lambda(t) = \frac{Ns(t) - Ns(t + \Delta t)}{Ns(t) \cdot \Delta t} = \frac{33 - 27}{33 \times 10} = 18 \cdot \frac{10^{-3} \text{déf}}{\text{heure}} = 3.79 \cdot \frac{10^{-5} \text{déf}}{\text{imp}}.$$

Si les électrovannes étaient remplacées, on obtiendrait :

$$\lambda(t) = \frac{C(\Delta t)}{N_0 \cdot \Delta t} = \frac{33 - 27}{50 \times 10} = 12 \cdot 10^{-3} \text{déf/heure}.$$

« Probabilité d'avoir une panne entre t et dt » = « probabilité de survivre à l'instant t »
x « probabilité conditionnelle de défaillance entre t et t+dt ».

Cette expression est identique à : $f(t) \cdot dt = R(t) \cdot \lambda(t) \cdot dt \Rightarrow f(t) = R(t) \cdot \lambda(t)$

Il vient donc l'expression du taux de défaillance en fonction de la loi de fiabilité et la densité de probabilité:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

D-Expressions des indices de fiabilité

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{dF(t)}{R(t) \cdot dt} = \frac{dF(t)}{(1 - F(t)) \cdot dt} \Rightarrow \lambda(t) \cdot dt = \frac{dF(t)}{1 - F(t)}$$

Nous intégrons les deux membres entre 0 et t:

$$\int_0^t \lambda(u) \cdot du = \int_0^t \frac{dF(u)}{1 - F(u)} \Rightarrow - \int_0^t \lambda(t) \cdot dt = \int_0^t - \frac{dF(u)}{1 - F(u)}$$

$$-\int_0^t \lambda(u).du = [\ln(1 - F(t))]_0^t = [\ln(1 - F(t) - \ln(1 - F(0))]$$

à $t=0$, il n'y a pas de défaillance, donc $F(0) = 0 \Rightarrow \ln(1 - F(0)) = \ln 1 = 0$

$$-\int_0^t \lambda(u).du = \ln(1 - F(t)) \Rightarrow e^{-\int_0^t \lambda(u).du} = 1 - F(t) = R(t).$$

On obtient donc les expressions générales des indices de fiabilité :

- **Fonction Fiabilité:** $R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u).du}$
- **Fonction de répartition:** $F(t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(u).du}$
- **Fonction de défaillance** $f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda(t).e^{-\int_0^t \lambda(u).du}$
- **MTBF= E(t)=** $\int_0^\infty t.f(t).dt$

La MTBF est définie comme étant l'espérance mathématique de la variable aléatoire T.

4. ANALYSE DE LA FIABILITE PAR LA LOI EXPONENTIELLE

4.1 – Définition de la loi exponentielle :

Rappel sur la durée de vie d'un matériel :

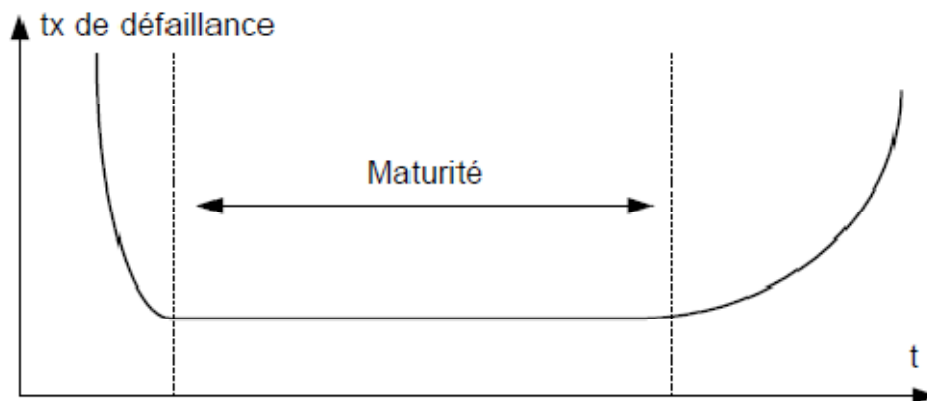


figure. courbe en baignoire.

On constate que durant la période de maturité d'un équipement, $\lambda(t)$ est constant ou sensiblement constant. C'est le champ d'application de la **loi exponentielle** qui **repose sur l'hypothèse $\lambda = \text{constante}$** . Les défaillances émergent sous l'action de causes diverses et indépendantes.

- Si $\lambda = \text{cte}$, alors **MTBF** = $1/\lambda$ en fiabilité
- Si $\mu = \text{cte}$ (taux de réparation), alors **MTTR** = $1/\mu$ en maintenabilité

$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u) \cdot du}$ et comme $\lambda(u) = \text{Cste} = \lambda$

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda \cdot du} = [e^{-\lambda u}]_0^t = e^{-\lambda t} \rightarrow \mathbf{R(t) = e^{-\lambda t}}$$

- **Fonction Fiabilité:** $R(t) = e^{-\lambda t}$
- **Fonction de répartition:** $F(t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-\lambda t}$
- **Fonction de défaillance** $f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$
- **MTBF= E(t)=** $\frac{1}{\lambda}$

4.2 – Durée de vie associée à un seuil de fiabilité :

Il est intéressant de savoir à quel instant la fiabilité atteindra un seuil déterminé

$$R(t) = e^{-\lambda t} \Rightarrow \ln R(t) = -\lambda t \Rightarrow t = -\frac{1}{\lambda} \ln R(t) \Rightarrow \mathbf{t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{R(t)}}$$

Exemple :

un composant a une MTBF de 2000 heures. A quelle date ce composant aura une fiabilité de 90% ?

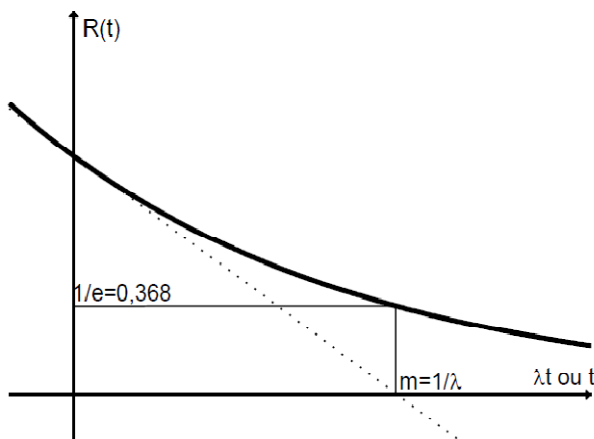
$$t_i = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{R(t)} = \text{MTBF} \times \ln \frac{1}{R(t)} = 2000 \times \ln \frac{1}{0.9} = 211$$

Au bout de 211 heures, on estime donc que 90% des composants survivront.

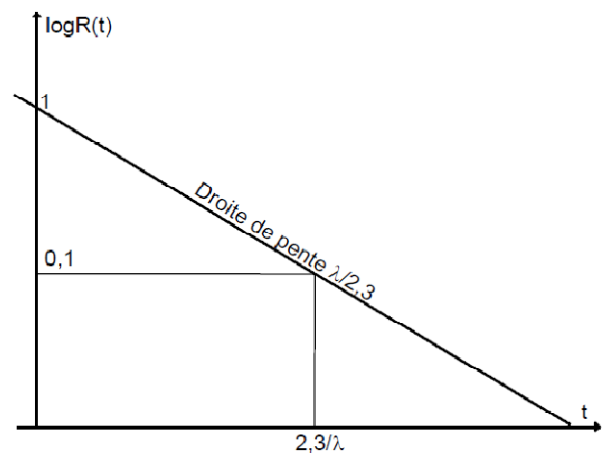
4.3 – Représentation graphique de la loi exponentielle :

Si $R(t) = e^{-\lambda t}$ $\ln R(t) = -\lambda t$ en logarithmes népériens.

et $\log R(t) = \frac{-\lambda t}{2.3}$ en logarithmes décimaux.



Loi exponentielle sur échelle linéaire



Loi exponentielle sur papier semi logarithmique

5. Fiabilité de système constitué de plusieurs composants

5.1 En série

La fiabilité R_S d'un ensemble de n constituants connectés en série est égale au produit des fiabilités respectives R_A, R_B, R_C, R_n de chaque composant.

$$R_S = R_A * R_B * R_C * \dots * R_n$$

Si les “ n ” composants sont identiques avec une même fiabilité R la formule sera la suivante :

$$R(s) = R^n$$

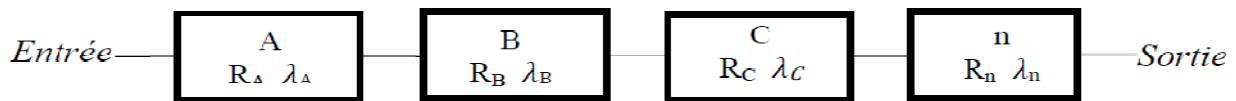


Figure. Composants en série.

$$R_S = \prod_{i=1}^n R_i$$

Exemple 1 :

Soit un poste de radio constitué de quatre composants connectés en série, une alimentation $R_A=0.95$, une partie récepteur $R_B=0.92$; un amplificateur $R_C=0.97$ et haut parleur $R_D= 0.89$; déterminer la fiabilité R_S de l'appareil.

$$R_S = R_A \cdot R_B \cdot R_C \cdot R_D = 0.95 \times 0.92 \times 0.97 \times 0.89 = 0.7545 \text{ (soit une fiabilité de 75\% environ)}$$

Exemple 2 :

Soit une imprimante constituée de 2000 composants montés en série supposés tous de même fiabilité, très élevée $R= 0.9999$, Déterminer la fiabilité de l'appareil.

$$R(s) = R^n = 0.9999^{2000} = 0.8187 \text{ (soit une fiabilité de 82 \% environ)}$$

Si on divise par deux le nombre des composants

$$R(s) = R^n = 0.9999^{1000} = 0.9048 \text{ (environ 90.5\%)}$$

Si on souhaite avoir une fiabilité de 90 % pour l'ensemble des 2000 composants montés en série, déterminons la fiabilité que doit avoir chaque composant

$$R_S = 0.9000 = R^{2000}$$

Expression que l'on peut écrire, à partir des logarithmes népériens sous la forme

$$\ln R_S = \ln 0.9 = 2000 \cdot \ln R \quad \text{D'où } R = 0.999945$$

Exemple 3 :

Une machine de production dont la durée totale de fonctionnement est de 1500 heures, se compose de quatre sous-systèmes A, B, C et D montés en série et ayant les MTBF respectifs suivants : MTBFA = 4500 heures MTBFB= 3200 heures MTBFC= 6000 heures MTBFD= 10500 heures. Déterminons les taux de pannes et le MTBF global (MTBFS)

a) Taux de pannes de l'ensemble

$$\lambda_A = \frac{1}{MTBF_A} = \frac{1}{4500} = 0.000222 \text{ défaillance par heure} = 0.222 \text{ pour 1000 heures}$$

$$\lambda_B = \frac{1}{MTBF_B} = \frac{1}{3200} = 0.000313 \text{ défaillance par heure} = 0.313 \text{ pour 1000 heures}$$

$$\lambda_C = \frac{1}{MTBF_C} = \frac{1}{6000} = 0.000167 \text{ défaillance par heure} = 0.167 \text{ pour 1000 heures}$$

$$\lambda_D = \frac{1}{MTBF_D} = \frac{1}{10500} = 0.000095 \text{ défaillance par heure} = 0.095 \text{ pour 1000 heures}$$

Le taux de défaillance global $\lambda_S = \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_D = 0.000797$ (par heure)

La fiabilité globale s'écrit : $R_S = e^{-0.000797.t} = e^{-0.000797.(1500)} = 0.303$ (30.3%)

Remarque :

Si on divise par deux la durée de fonctionnement de la machine (750 heures)

$$R_S(750) = e^{-0.000797.t} = e^{-0.000797.(750)} = 0.550 \text{ (55\%)}$$

b) la MTBF de l'ensemble

$$MTBF_S = \frac{1}{\lambda_S} = \frac{1}{0.000797} = 1255 \text{ heures, Soit un temps de 1255 heures entre deux défaillances}$$

c) Quelle est la probabilité que le système parvienne sans pannes jusqu'à 5000 heures

$$R_S(5000) = e^{-0.000797.t} = e^{-0.000797.(5000)} = 0.0186 \text{ (environ 2 \%)}$$

5.2 En parallèle

La fiabilité d'un système peut être augmentée en plaçant les composants en parallèle. Un dispositif constitué de **n** composants en parallèle ne peut tomber en panne que si les **n** composants tombent en panne au même moment. Si **Fi** est la probabilité de panne d'un composant, la fiabilité associée **Ri** est son complémentaire:

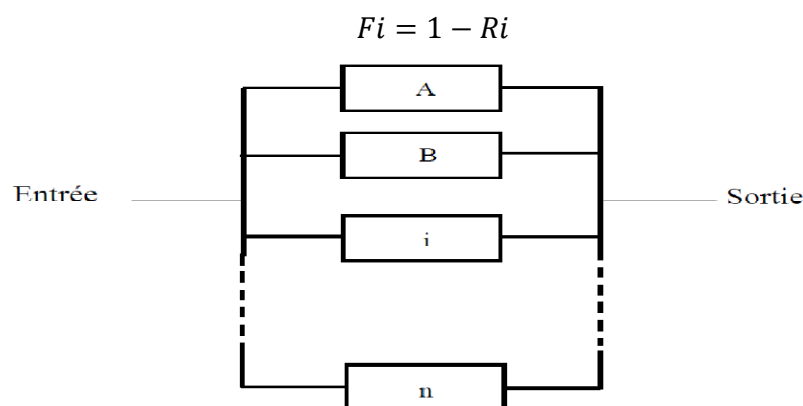


Figure . Composants en parallèle.

Soit les “n” composants de la figure ci-dessous montés en parallèle. Si la probabilité de panne pour chaque composant repéré (i) est notée F_i alors:

$$F_S = \prod_{i=1}^n F_i$$

Alors:

$$R_S = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i)$$

Exemple :

Trois dispositifs A, B et C de même fiabilité $R_A = R_B = R_C = 0.75$ sont connectés en parallèle

- a) Déterminons la fiabilité de l'ensemble

$$R_S = 1 - (1 - 0,75)^3 = 0,984$$

Si on réduit le nombre des composants à deux

$$R_S = 1 - (1 - 0,75)^2 = 0,9375$$

Si on met quatre dispositifs en parallèle

$$R_S = 1 - (1 - 0,75)^4 = 0,9961$$

- b) Quel nombre de dispositifs en parallèle faudrait-il mettre pour avoir une fiabilité globale de 0,999 (99,9%)

$$R_S = 0,999 = 1 - (1 - 0,75)^n = 1 - (0,25)^n$$

$$D'où (0,25)^n = 1 - 0,999 = 0,001$$

En utilisant les logarithmes népériens

$$n \ln(0,25) = \ln(0.001)$$

$$n(-1,386) = (-6,908)$$

$$n = 4,983$$

Ce qui implique d'avoir au moins cinq dispositifs en parallèle

- c) Si on souhaite avoir une fiabilité globale de 99% avec trois dispositifs seulement en parallèle, quelle devrait être la fiabilité R de chacun de ces dispositifs:

$$R_S = 0,999 = 1 - (1 - R)^3$$

D'où

$$(1 - R)^3 = 1 - 0,999 = 0,010$$

En utilisant les logarithmes népériens

- d) $3 \ln(1 - R) = \ln(0.010)$

$$3 \ln(1 - R) = (-4,605)$$

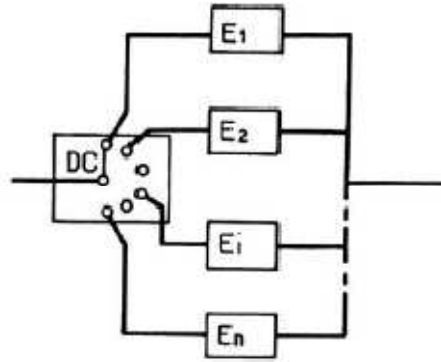
$$\ln(1 - R) = (-1,535)$$

$$(1 - R) = 0,2154$$

soit $R = 0,7846$ (Soit une fiabilité minimale de 78,46%)

5.3 Redondance passive :

Dans ce cas, un seul élément fonctionne, les autres sont en attente. Ceci a l'avantage de diminuer ou de supprimer le vieillissement des éléments ne travaillant pas. En contrepartie, on a l'inconvénient d'être obligé d'avoir un organe de détection des pannes et de commutation d'un système sur un autre. Le calcul d'un système à redondance passive ou « stand-by » se fait en tenant compte de la variable temps. Il faut donc connaître au préalable, pour chaque composant, son taux de défaillance $\lambda(t)$ et sa loi de fiabilité $R(t)$.



❖ **Calcul d'un système à redondance passive à 2 éléments en parallèle :**

Hypothèse : le taux de défaillance des éléments E1 et E2 est constant et est égal à λ_{e1} et λ_{e2} . Cette hypothèse a pour conséquence que les lois de fiabilité sont de type exponentiel :

$$R_{e1}(t) = e^{-\lambda_{e1}t} \text{ et } R_{e2}(t) = e^{-\lambda_{e2}t}$$

On fait aussi l'hypothèse que la fiabilité de l'organe DC est égale à 1.

Il sera facile par la suite de la prendre en compte par

la suite dans le calcul, cet organe étant en série

avec le système {E1, E2}.

$$R_{e1}(t) = e^{-\lambda_{e1}t} \text{ et } R_{e2}(t) = e^{-\lambda_{e2}t}$$

$$f_{e1}(t) = \lambda_{e1}e^{-\lambda_{e1}t} \text{ et } f_{e2}(t) = \lambda_{e2}e^{-\lambda_{e2}t}$$

Le système fonctionnera avec E1 ou E2, ces événements étant mutuellement exclusifs (E1 sans E2 ou E2 sans E1, mais jamais les 2 en même temps).

$$R(S) = [\text{Prob}(S \text{ marche sachant que E1 marche}) \times \text{Prob}(E1 \text{ marche})]$$

$$+ [\text{Prob}(S \text{ marche sachant que E1 ne marche pas}) \times \text{Prob}(E1 \text{ ne marche pas})].$$

- Prob(E1 ne marche pas) → probabilité que E1 soit défaillant
- Prob(S marche sachant que E1 marche) = 1 (tant que E1 marche, S fonctionnera toujours)
- Prob(E1 marche) → probabilité que E1 fonctionne → $R_{e1}(t) = e^{-\lambda_{e1}t}$
- Probabilité que E1 tombe en panne sur l'intervalle [0, t]
à l'instant $T = \int_0^t f_{e1}(t) dt = \int_0^t \lambda_{e1} e^{-\lambda_{e1}T} dT$
- Probabilité que S marche sachant que E1 ne marche plus à partir de T
 $= R_{e2}(t > T) = e^{-\lambda_{e2}(t-T)}.$

$$R_s(t) = 1 \times e^{-\lambda_{e1}t} + \left(\int_0^t \lambda_{e1} e^{-\lambda_{e1}T} dT \right) \times e^{-\lambda_{e2}(t-T)}$$

$$= e^{-\lambda_{e1}t} + \lambda_{e1} \cdot \int_0^t e^{-\lambda_{e1}T} dT \times e^{-\lambda_{e2}t} \times e^{\lambda_{e2}T}$$

$$R_s(t) = e^{-\lambda_{e1}t} + \lambda_{e1} \cdot e^{-\lambda_{e2}t} \int_0^t e^{-\lambda_{e1}T} \times e^{\lambda_{e2}T} dT = e^{-\lambda_{e1}t} + \lambda_{e1} \cdot e^{-\lambda_{e2}t} \int_0^t e^{-(\lambda_{e1}-\lambda_{e2})T} dT$$

$$R_s(t) = e^{-\lambda_{e1}t} + \lambda_{e1} \cdot e^{-\lambda_{e2}t} \cdot \left[\frac{e^{-(\lambda_{e1}-\lambda_{e2})T}}{-(\lambda_{e1}-\lambda_{e2})} \right]_0^t$$

$$R_s(t) = e^{-\lambda_{e1}t} + \lambda_{e1} \cdot e^{-\lambda_{e2}t} \cdot \left[\frac{e^{-(\lambda_{e1}-\lambda_{e2})t}}{-(\lambda_{e1}-\lambda_{e2})} - \frac{1}{-(\lambda_{e1}-\lambda_{e2})} \right]$$

$$R_s(t) = e^{-\lambda_{e1}t} + \lambda_{e1} \cdot e^{-\lambda_{e2}t} \cdot \left[\frac{1 - e^{-(\lambda_{e1}-\lambda_{e2})t}}{(\lambda_{e1}-\lambda_{e2})} \right]$$

$$R_s(t) = \frac{\lambda_{e1} \cdot e^{-\lambda_{e1}t} - \lambda_{e2} \cdot e^{-\lambda_{e1}t} + \lambda_{e1} \cdot e^{-\lambda_{e2}t} - \lambda_{e1} \cdot e^{-\lambda_{e2}t} \cdot e^{-(\lambda_{e1}-\lambda_{e2})t}}{\lambda_{e1} - \lambda_{e2}}$$

$$R_s(t) = \frac{\lambda_{e1} \cdot e^{-\lambda_{e1}t} - \lambda_{e2} \cdot e^{-\lambda_{e1}t} + \lambda_{e1} \cdot e^{-\lambda_{e2}t} - \lambda_{e1} \cdot e^{-\lambda_{e2}t - \lambda_{e1}t + \lambda_{e2}t}}{\lambda_{e1} - \lambda_{e2}}$$

$$R_s(t) = \frac{\lambda_{e1} \cdot e^{-\lambda_{e1}t} - \lambda_{e2} \cdot e^{-\lambda_{e1}t} + \lambda_{e1} \cdot e^{-\lambda_{e2}t} - \lambda_{e1} \cdot e^{-\lambda_{e1}t}}{\lambda_{e1} - \lambda_{e2}}$$

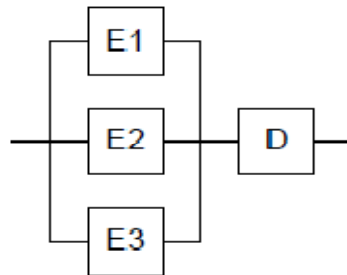
$$R_s(t) = \frac{\lambda_{e1} \cdot e^{-\lambda_{e2}t} - \lambda_{e2} \cdot e^{-\lambda_{e1}t}}{\lambda_{e1} - \lambda_{e2}}$$

Si on prend en compte l'élément de détection et de commutation DC, on obtient alors :

$$R_s(t) = e^{-\lambda_{DCT}} \cdot \frac{\lambda_{e1} \cdot e^{-\lambda_{e2}t} - \lambda_{e2} \cdot e^{-\lambda_{e1}t}}{\lambda_{e1} - \lambda_{e2}}$$

5.4 Redondance majoritaire :

La redondance majoritaire est telle que la fonction est assurée si au moins la majorité des éléments est en état de fonctionnement. Cette redondance concerne surtout des signaux de grande sécurité, et en particulier les équipements électroniques. Le signal de sortie est celui de la majorité des composants. Le cas le plus simple comporte 3 éléments.



On considère que l'organe D de décision a une fiabilité égale à 1.

RS=probabilité d'avoir plus de 2 éléments en fonctionnement correct.

Si $R_{e1}=R_{e2}=R_{e3}=R$

$$R_s = \sum_{k=2}^{k=3} C_3^k \cdot R^k \cdot (1 - R)^{3-k} = 3R^2 - 2R^3$$

Si on généralise à n (impair obligatoirement pour avoir une majorité) éléments, on obtient :

$$R_s = \sum_{k=c}^{k=n} C_n^k \cdot R^k \cdot (1 - R)^{n-k}$$

$$\text{avec } c = \frac{n+1}{2}.$$

La formule de calcul de « c » permet d'obtenir la majorité des éléments.

En tenant compte de la fiabilité du composant de décision :

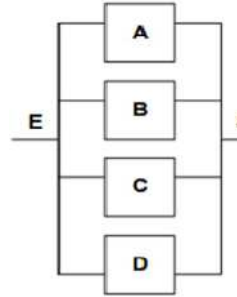
$$R_s = R_D \times \sum_{k=c}^{k=n} C_n^k \cdot R^k \cdot (1 - R)^{n-k}$$

6. Exercices

Exercice N°01

Un dispositif se compose de 4 composants connectés en // dont les fiabilités sont respectivement de 0,98 ; 0,97 ; 0,95 et 0,99.

Déterminer la fiabilité de l'ensemble

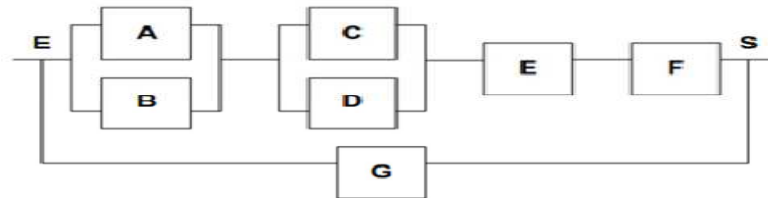


Exercice N°02

Le dispositif donné sous dessous à les fiabilités élémentaires suivantes pour 1000 heures :

Ra=0,87 ; Rb=0,85 ; Rc=Rd=0,89 ; Re=0,94 ; Rf=0,96 ; Rg=0,97

Calculer la fiabilité et le taux de défaillance de l'ensemble.

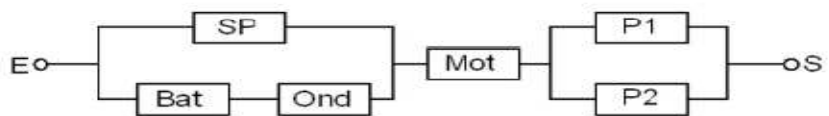


Exercice N°03

Soit le système de moto-compresseur composé d'une source principale (SP) en parallèle avec une batterie (Bat) et onduleur (Ond). (Mot : Moteur, P : Pompe)

Déterminer la fiabilité du système pour une durée de service $T = 10000 h$, connaissant le taux de défaillance de chacune de ces composant :

$\lambda_{SP} = 1 \cdot 10^{-4}$ Défaillance/heure
 $\lambda_{Bat} = 15 \cdot 10^{-4}$ Défaillance/heure
 $\lambda_{Ond} = 1 \cdot 10^{-5}$ Défaillance/heure
 $\lambda_{Mot} = 9 \cdot 10^{-5}$ Défaillance/heure
 $\lambda_P = 5 \cdot 10^{-4}$ Défaillance/heure



Exercice N° 04

Comparer la fiabilité à un instant t quelconque des 2 dispositifs suivants, constitués à l'aide de 2n composants identiques :

1. en série, n systèmes formés de 2 composants en parallèle ;
2. en parallèle, 2 systèmes formés de n composants en série.

(On pourra poser $u=1-R(t)$, ou $R(t)$ désigne la fiabilité d'un composant à l'instant t).

Exercice N° 05

Une entreprise est spécialisée dans la réparation de matériel audiovisuel dont certains composants sont très fragiles. Elle souhaite proposer à ses clients une période de garantie après réparation d'un composant défaillant. Une étude a été menée portant sur la fiabilité des composants après ce type de réparation.

Cette étude montre que la moyenne des durées de bon fonctionnement d'un composant après réparation est de 500 jours.

On admet que la durée de bon fonctionnement des appareils après réparation, exprimée en jour, est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle.

- a. Montrer que le paramètre de cette loi est $\lambda = 0,002$.
- b. Calculer la probabilité pour qu'un appareil n'ait pas de défaillance au cours de l'année qui suit la réparation. (On considérera qu'une année compte 365 jours.)
- c. Calculer la probabilité pour qu'un appareil tombe en panne au cours des deux années suivant la réparation.
- d. L'entreprise décide de limiter à 6 % des appareils: réparés la possibilité de retour sous garantie. Quelle période de garantie doit-elle alors proposer après une réparation ?

Exercice N° 06

La durée de vie d'un composant est une variable aléatoire , exprimée en jours, qui suit une loi exponentielle de paramètre .0.004

- 1) Quelle est la probabilité que la durée de vie du composant excède trois cents jours ?
- 2) Quelle est la probabilité que la durée de vie du composant soit d'au plus une année ?
- 3) Quelle est la probabilité que la durée de vie du composant soit comprise entre deux et trois ans ?

Exercice n°07

La durée de vie d'un appareil électronique est une variable aléatoire , exprimée en heures, qui suit une loi exponentielle de paramètre . 0.00026

- 1) Quelle est la probabilité que la durée de vie de l'appareil soit de 1000 heures au maximum ?
- 2) En déduire la probabilité que la durée de vie de l'appareil soit d'au moins 1000 heures.
- 3) Sachant que la durée de vie de l'appareil a dépassé 1000 heures, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 2000 heures ?
- 4) Sachant que l'appareil a fonctionné plus de 2000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3000 heures ?

Exercice N°8

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit une « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$). *Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.*

- 1) Sachant que $P(X \geq 10) = 0,286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est 0.125.
- 2) Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.
- 3) Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?
- 4) On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?
- 5) Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de deux ans soit supérieure à 0,999 ?