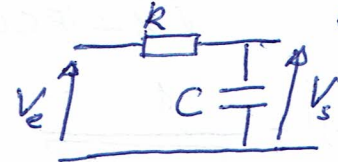


# Solution Serie de TD N°2

Exercice 1: filtre passe-bas passif du premier ordre de type RC

1) la fonction de Transfert

$$H(f) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$



$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f RC}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

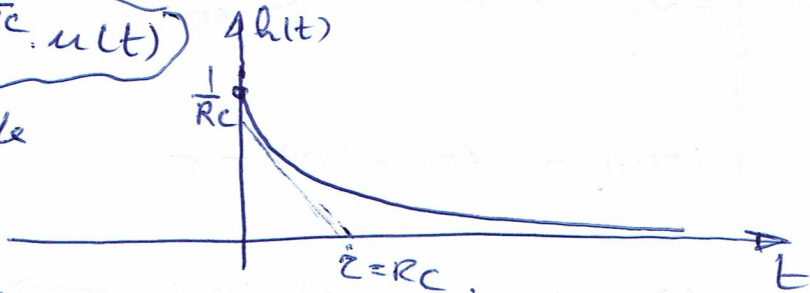
$$h(t) = \mathcal{TF}^{-1}\{H(f)\} = \mathcal{TF}^{-1}\left\{\frac{1}{1 + j2\pi RC}\right\}$$

$$h(t) = \mathcal{TF}^{-1}\left\{\frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{\frac{1}{RC} + j2\pi f}\right\}$$

nous avons que  $\mathcal{TF}^{-1}\left\{\frac{1}{\alpha + j2\pi f}\right\} = e^{-\alpha t} \cdot u(t)$ , Alors

$$h(t) = \frac{1}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot u(t)$$

Reponse impulsionnelle



- Réponse indicielle

C'est la réponse à un échelon ( $u(t)$ ).

la sortie sera donc : le produit de convolution

$$\Delta(t) = e(t) * h(t) = u(t) * h(t) = h(t) * u(t)$$

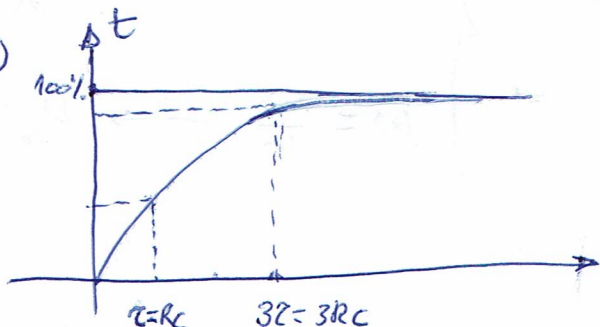
$$\Delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

$$h(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \\ \text{et } u(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \\ u(t) = 1.$$

$$\text{Alors } \Delta(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau$$

$$\Delta(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t \exp\left(-\frac{\tau}{RC}\right) d\tau = -\exp\left(-\frac{\tau}{RC}\right) \Big|_0^t$$

$$\Delta(t) = \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right] u(t)$$



$$2) H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}, \text{ avec } \omega_c = \frac{1}{RC} \text{ pulsation de coupure.}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}, \quad \omega_c = \frac{1}{RC} \text{ (pour laquelle } |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{)}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^2}}, \text{ Alors: } |H(j\omega)|_{dB} = 20 \log |H(j\omega)|$$

$$|H(j\omega)|_{dB} = -20 \log(\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^2}) = -10 \log[1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^2]$$

$$\varphi(\omega) = \angle H(j\omega) = \text{Arg}(N) - \text{Arg}(D) = \text{Arctg}(0) - \text{Arctg}(\frac{\omega}{\omega_c})$$

$$\varphi(\omega) = -\text{Arctg}(\frac{\omega}{\omega_c}), \text{ avec } \frac{\omega}{\omega_c} = RC\omega.$$

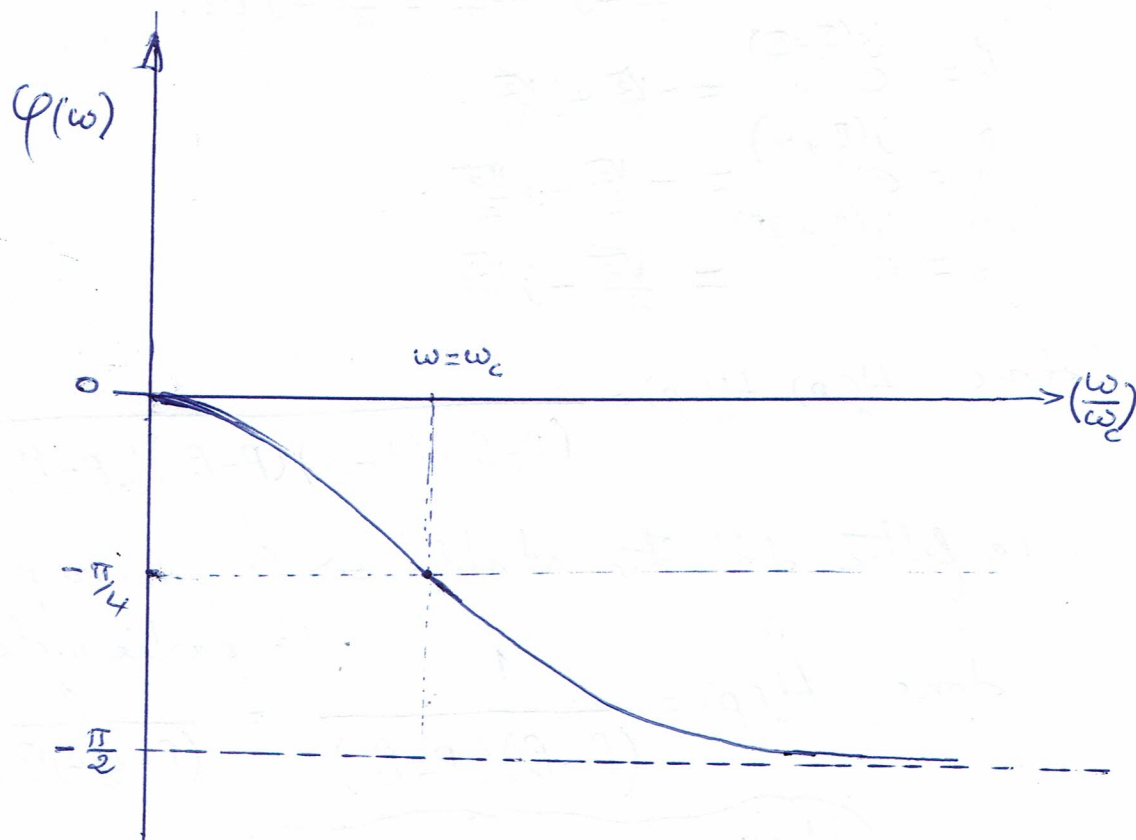
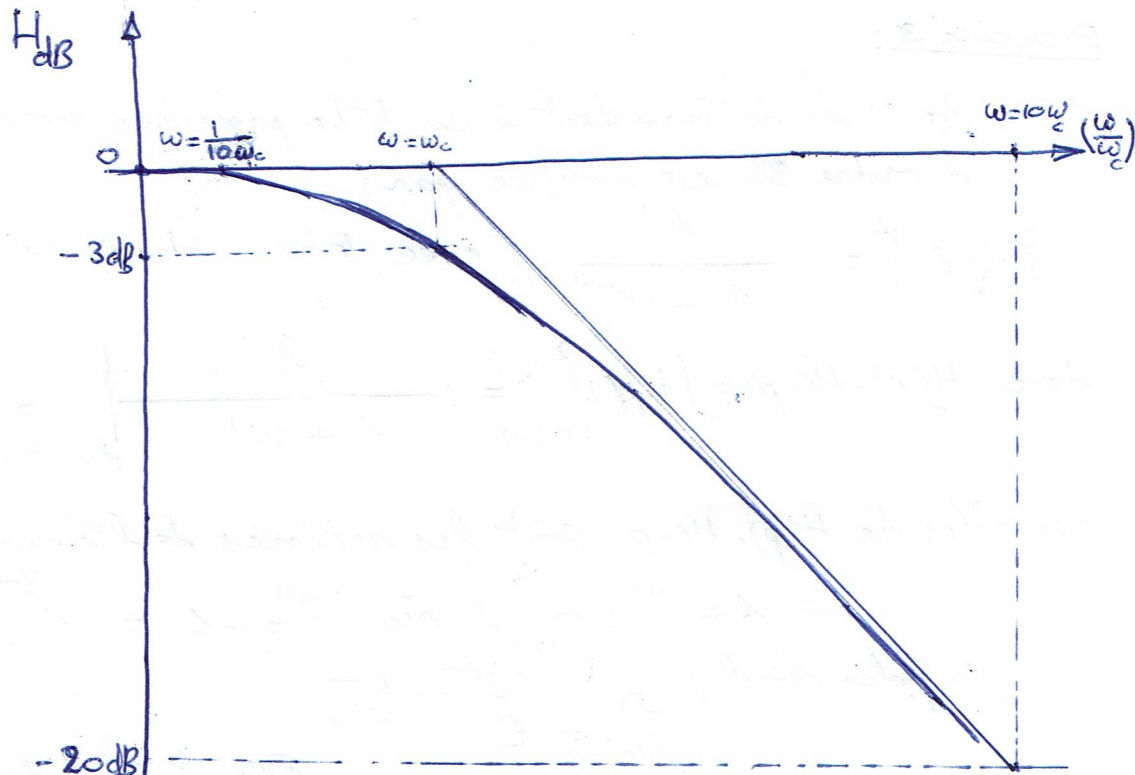
$$3) \text{ Pour } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega}{\omega_c} \ll 1 \text{ on a: } \omega < \frac{\omega_c}{10} \longrightarrow H_{dB} \simeq -10 \log(1) = 0 \\ \varphi(\omega) = \text{Arctg}(0) = 0. \end{array} \right.$$

$$\text{Pour } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega}{\omega_c} \gg 1 \longrightarrow \omega > 10\omega_c \longrightarrow H_{dB} = -20 \log(\frac{\omega}{\omega_c}) \\ \varphi(\omega) = -\text{Arctg}(\frac{\omega}{\omega_c}) = -\frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$$

$$\text{Pour } \left\{ \begin{array}{l} \omega = \omega_c \longrightarrow H_{dB} = -10 \log(2) = -3 \text{ dB.} \\ \varphi(\omega) = -\text{Arctg}(1) = -\frac{\pi}{4} \end{array} \right.$$

$$\text{Pour } \left\{ \begin{array}{l} \omega = 10\omega_c \longrightarrow H_{dB}(10\omega_c) \simeq -10 \log(10^2) = -20 \text{ dB.} \\ \text{car } (1 + 10^2) \simeq 10^2 \\ \omega = \frac{\omega_c}{10} \longrightarrow H_{dB} = -10 \log(1 + (\frac{1}{10})^2) \simeq -10 \log(1) = 0 \end{array} \right.$$

4)



### Exercice 3:

1) la fonction de Transfert d'un filtre passe bas normalisé de Butterworth d'ordre 2 est donnée par:

$$|H_n(p)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2k}}, \text{ avec } k=2 \text{ et } \omega_c=1.$$

$$\text{donc } H_n(p) \cdot H_n(-p) = |H_n(p)|^2_{p=j\omega} = \frac{1}{1 + \omega^4} \Big|_{p^2 = -\omega^2} = \frac{1}{1 + p^4}$$

Les pôles de  $H(p) \cdot H(-p)$  sont les racines de l'équation:

$$1 + p^4 = 0 \text{ d'où } p^4 = -1 = e^{j(\pi + 2k\pi)}$$

Ces pôles sont:  $p_k = e^{j(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2})}$  avec  $k=0,1,2,3$ .

$$p_0 = e^{j\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + j \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$p_1 = e^{j(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$p_2 = e^{j(\frac{\pi}{4} + \pi)} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$p_3 = e^{j(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{donc } H_n(p) \cdot H_n(-p) = \frac{1}{(p-p_0)(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)}.$$

Le filtre doit être stable  $\Rightarrow$  les pôles en  $p$  doivent être à partie réelle négative.

$$\text{donc } H_n(p) = \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{1}{(p + \frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2})(p + \frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2})}$$

$$H_n(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1} \leftarrow \text{F.T d'un filtre passe-bas normalisé d'ordre 2.}$$

\* Fonction de Transfert du filtre passe-haut d'ordre 2 de fréquence de coupure  $f_c = 100 \text{ Hz}$  sera:

$$H_{PH}(p) = H_n(p) \Big|_{p = \frac{2\pi f_c}{p}} = \frac{1}{\left(\frac{2\pi f_c}{p}\right)^2 + \sqrt{2} \cdot \left(\frac{2\pi f_c}{p}\right) + 1}$$

$$H_{P.H.}(p) = \frac{p^2}{p^2 + 2\pi f_c \sqrt{2} \cdot p + (2\pi f_c)^2}$$

avec  $f_c = 100 \text{ Hz}$ .

↑  
F.T du filtre Passe-Haut désiré

Exo 4: Détermination de la fonction de transfert d'un filtre P. bande de Butterworth d'ordre 4 avec

$$f_2 = 1 \text{ kHz} \Rightarrow \omega_2 = 2\pi f_2 = 2\pi \times 1 \text{ kHz}$$

la Bande B = 200 Hz.  
passante

1) il faut déterminer la F.T d'un filtre P. bas normalisé d'ordre 2

donc  $H_n(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2} p + 1}$

2) remplacer p dans  $H_n(p)$  par:  $\frac{p^2 + \omega_2^2}{2\pi \cdot B \cdot p}$

$$H(p)_{\text{P.bande}} = \frac{1}{\left(\frac{p^2 + \omega_2^2}{2\pi B \cdot p}\right)^2 + \sqrt{2} \cdot \frac{p^2 + \omega_2^2}{2\pi \cdot B \cdot p} + 1}$$

$$H(p)_{\text{P.bande}} = \frac{4\pi^2 B^2 p^2}{p^4 + 2\pi B p^3 + (4\pi^2 B^2 + 2\omega_2^2) p^2 + 2\pi B \omega_2^2 p + \omega_2^4}$$

↑  
fonction de transfert du filtre P. bande désiré.

Exo 5: Détermination de la fonction de transfert du filtre Coupe-bande de Butterworth d'ordre 4

avec  $f_{ch} = 4,5 \text{ kHz}$  et  $f_{cb} = 2 \text{ kHz}$ .

donc  $B = f_{ch} - f_{cb} = 4,5 - 2 = 2,5 \text{ kHz}$  (la bande coupée)

$f_2 = \sqrt{f_{cb} \cdot f_{ch}} = \sqrt{2 \times 4,5} = \sqrt{9} = 3 \text{ kHz}$  (fréquence géométrique centrale)

$$\omega_2 = 2\pi f_2$$

-1) Détermination de la fonction de transfert d'un filtre P. bas normalisé d'ordre moitié c.à.d  $K=2$ , Alors.

$$H_n(P) = \frac{1}{P^2 + \sqrt{2} P + 1.}$$

2) remplacer  $P$  dans  $H_n(p)$  par :  $\frac{2\pi \cdot B \cdot P}{P^2 + \omega_2^2}$

$$H_{c.b.}(P) = \frac{1}{\left(\frac{2\pi B \cdot P}{P^2 + \omega_2^2}\right)^2 + \sqrt{2} \frac{2\pi B \cdot P}{P^2 + \omega_2^2} + 1.}$$

$$H_{c.b.}(P) = \frac{P^4 + 2\omega_2^2 \cdot P^2 + \omega_2^4}{P^4 + 2\pi \cdot B \cdot P^3 + (4\pi^2 B^2 + 2\omega_2^2) \cdot P^2 + 2\pi \cdot B \cdot \omega_2^2 \cdot P + \omega_2^4}$$

↑  
fonction de transfert du filtre coupe-bande désiré