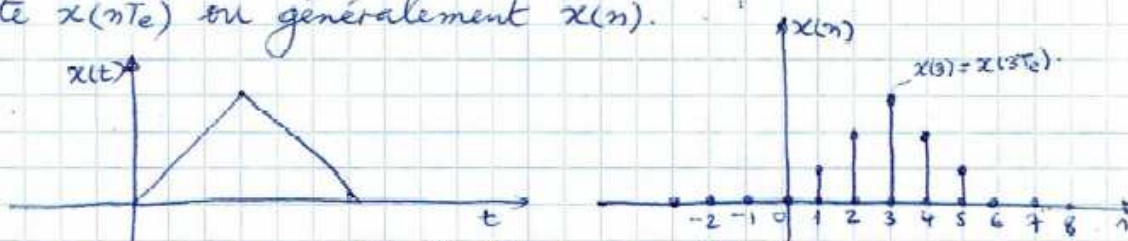


①

Chapitre 4 : Signaux et Systèmes Discrets

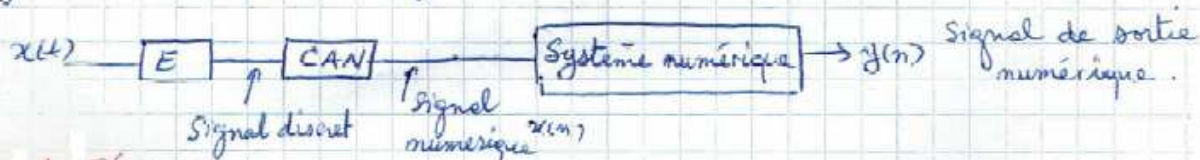
Représentation des signaux discrets :

- * Un signal continu est défini sur une variable continue "t"
- * Un signal discret il n'est défini qu'aux instants d'échantillonnage (nT_e) il se note $x(nT_e)$ ou généralement $x(n)$.



La suite $\{x(n)\}$ se nomme signal discret ou séquence.
 n : représente le $n^{\text{ième}}$ échantillon.

Un signal numérique = signal discret quantifié



Exemple de Séquences :

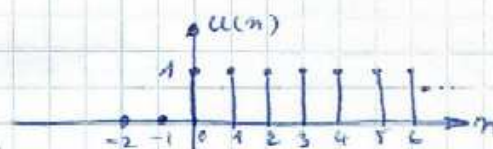
01) Séquence impulsion unité $\delta(n)$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n=0 \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$



02) Séquence Echelon unité $u(n)$

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \text{ et } u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-k)$$

03) Séquence exponentielle réelle :

$$x(n] = a^n, \quad a < 1$$

$$x(t) = e^{-at} \Rightarrow x(nT) = e^{-anT_e} = (e^{-aT_e})^n = a^n$$



04) Séquence sinusoïdale :

$$x(n) = A \cos(\omega_0 n + \varphi) \text{ avec } \omega_0 \text{ pulsation}$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 T_e$$

05) Séquence périodique

$$x(n) = x(n+N) \quad N: \text{période}$$

Exemple : $x(n) = A \sin\left(\frac{2\pi}{N} n + \varphi\right)$

Energie et Puissance des Signaux numériques:

* L'énergie d'une séquence $\{x(n)\}$ est définie par:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

* La puissance moyenne d'une séquence est définie par:

$$P_x = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{n=-\frac{K}{2}}^{\frac{K}{2}} |x(n)|^2$$

Opérations élémentaires sur des signaux numériques:

* **Somme:** La somme de deux signaux est obtenue en additionnant deux à deux les échantillons pour une même valeur de la variable indépendante.

* **Produit:** Le produit de deux signaux est obtenu en multipliant deux à deux les échantillons pour une même valeur de la variable indépendante.

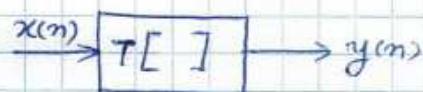
* **Produit par une constante:** Le produit d'un signal par une constante est obtenu par la multiplication de tous les échantillons du signal par la même constante.

* **Décalage:** on dit qu'un signal $y(n)$ est la version décalée ou retardée d'un autre signal $x(n)$ si l'on a pour tout n :
 $y(n) = x(n - n_0)$, où n_0 : entier positif ou négatif

* Toute séquence numérique peut s'écrire:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(n-k)$$

Systèmes Discrets:



où $[T[]]$ c'est un opérateur qui agit sur une séquence d'entrée $x(n)$ et délivre à sa sortie une séquence $y(n)$: $y(n) = T[x(n)]$

Linéarité: si $T[x_1(n)] = y_1(n)$ et $T[x_2(n)] = y_2(n)$ alors:

$$T[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)] = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n) \quad a_1 \text{ et } a_2: \text{des constantes}$$

Invariance dans le temps: si $T[x(n)] = y(n)$ alors:

$$T[x(n-k)] = y(n-k)$$

Réponse impulsionnelle:

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) T[\delta(n-k)]$$

avec $T[\delta(n)] = h(n)$: réponse impulsionnelle, alors

$$T[\delta(n-k)] = h(n-k)$$

$$\Rightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) h(n-k) = x(n) * h(n)$$

C'est la convolution discrète de $x(n)$ et $h(n)$

$$\text{de même } y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) x(n-k)$$

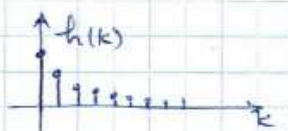
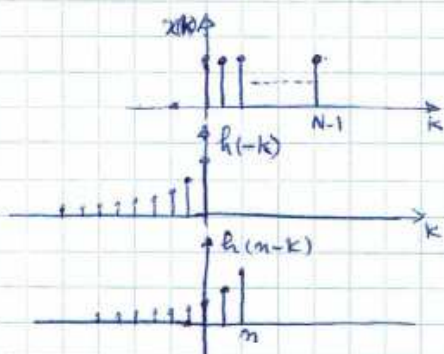
③

Exemple :

$$h(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \quad a < 1 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

impulsion rectangulaire

$$x(n) = u(n) - u[n - (N-1)]$$

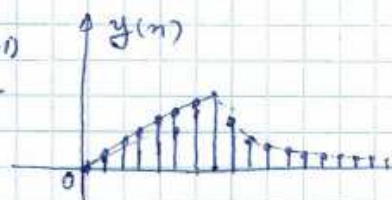


$$x(n) \rightarrow \boxed{h(n)} \rightarrow y(n) = x(n) * h(n)$$

$$01) n < 0 \Rightarrow y(n) = 0$$

$$02) 0 \leq n < N \Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^n a^{n-k} = a^n \cdot \frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}}$$

$$03) n \geq N \Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a^{n-k} = a^n \cdot \frac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}}$$

Stabilité :

$$\text{pour que le système soit stable} \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

Démonstration : $x(n)$ bornée $\Rightarrow \tau[x(n) \text{ bornée}] = y(n)$ bornée

$$x(n) : \text{bornée} \Rightarrow |x(n)| < M \quad \forall n$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \left| \sum_k x(k) h(n-k) \right| \leq \sum_k |x(k)| \cdot |h(n-k)| \\ &\leq M \cdot \sum |h(n-k)| < \infty \\ &\Rightarrow \sum |h(n-k)| < \infty. \end{aligned}$$

Causalité :

$$\text{un système causal} \Rightarrow h(n) = 0 \text{ si } n < 0$$

$$* \text{ une séquence } x(n) \text{ causal} \Rightarrow x(n) = 0 \text{ si } n < 0$$

$$\text{Exemple : } h(n) = a^n \cdot u(n)$$

$$01) h(n) : \text{est causal}$$

$$02) \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1-|a|^{n+1}}{1-|a|} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{1-|a|} \quad \left(\text{stable si } |a| < 1 \right)$$

Equation aux différences :

mathématiquement, l'excitation et la réponse d'un large sous ensemble de système linéaire satisfont une équation aux différences d'ordre N

$$\text{du type} \quad \sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r),$$

$$\text{Exemple : } y(n) - a y(n-1) = x(n)$$

$$\text{Si } x(n) = \delta(n) \text{ alors } y(n) = h(n)$$

$$\Rightarrow h(n) - a h(n-1) = \delta(n).$$

④ Calcul de $h(n)$: Système causal $\Rightarrow h(n)=0$ pour $n < 0$.

$$\begin{aligned}h(n) - a h(n-1) &= \delta(n) \\ \Rightarrow h(n) &= a h(n-1) + \delta(n) \\ h(0) &= a h(-1) + \delta(0) = 1 \\ h(1) &= a h(0) + \delta(1) = a \\ h(2) &= a h(1) + \delta(2) = a^2 \\ &\vdots\end{aligned}$$

$$h(n) = a^n, \quad h(n) = a^n \cdot u(n).$$

en général : Si $h(n)$ est de durée finie $\Rightarrow$ R.I.F (réponse impulsionnelle finie)
Si $h(n)$ est de durée infinie $\Rightarrow$ R.I.I (réponse impulsionnelle infinie)

* Si l'ordre du système " N "

* $N = 0 \Rightarrow y(n) = \frac{1}{a_0} \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$ est un système non récursif (R.I.F)

$$y(n) = \sum_{r=0}^M h(r) x(n-r)$$

$$h(r) = \begin{cases} \frac{b_r}{a_0} & , r = 0, 1, \dots, M \\ 0 & \text{Ailleurs.} \end{cases}$$

* Si $N \neq 0 \Rightarrow$ le système est dit récursif (R.I.I).

TRANSFORMÉE EN $\mathbb{Z}$

C'est un outil mathématique développé pour le traitement des suites (càd les signaux discrets). La transformée en $\mathbb{Z}$, remplace la séquence $x(n)$ par une fonction de variable complexe $X(\mathbb{Z})$, elle est définie par :

$$X(\mathbb{Z}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot \mathbb{Z}^{-n} : \text{C'est la transformée en } \mathbb{Z} \text{ bilatérale}$$

$$X(\mathbb{Z}) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) \cdot \mathbb{Z}^{-n} : \text{C'est la transformée en } \mathbb{Z} \text{ unilatérale pour les signaux causaux.}$$

avec $\mathbb{Z}$: variable complexe.

⑤

avec $z = r e^{j2\pi f}$ (forme polaire) $\Rightarrow X(z) = X(r e^{j2\pi f})$

$$X(r e^{j2\pi f}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot r^{-n} \cdot e^{j2\pi f \cdot n} \quad (\text{transformée de Fourier de } x(n) \cdot r^{-n})$$

si $r=1 \Rightarrow r=|z|=1 \Rightarrow X(z) = X(e^{j2\pi f}) \Rightarrow \text{Transformée en } z = \text{Transformée de Fourier}$ Domaine de convergence:Toutes les valeurs de z pour lesquelles $X(z)$ converge c-à-d :

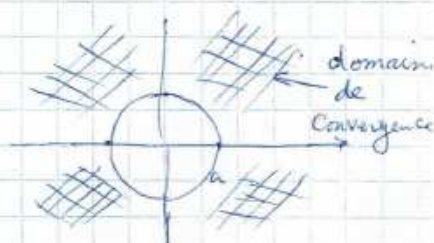
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| \cdot r^{-n} < \infty \quad (\text{absolument sommable}).$$

Remarque: $X(z)$ peut converger même si $X(e^{j2\pi f})$ ne converge pas.Exemple: $x(n) = u(n)$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \rightarrow \infty \Rightarrow X(e^{j2\pi f})$ divergealors que: $\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)| r^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n} = \frac{1}{1-r^{-1}}$ si $r > 1$.Donc le domaine de convergence de $X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ est $1 < |z| < \infty$.Domaine de $X(z)$ est $R_x^- < |z| < R_x^+$ Exemple: $x(n) = a^n \cdot u(n)$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a z^{-1})^n$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} \quad \text{si } |a z^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$$

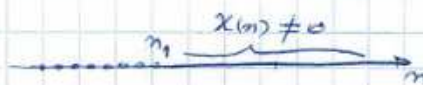
$$X(z) = \frac{z}{z-a}, \quad \text{un zéro en } z=0 \text{ et un pôle en } z=a.$$

Cas particuliers:a) Séquence de durée finie: $x(n) \neq 0$ uniquement pour $n_1 \leq n \leq n_2$.

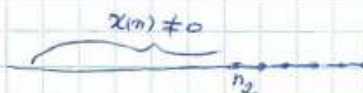
$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n) z^{-n} \Rightarrow 0 < |z| < \infty$$

à condition que $|x(n)|$ bornée
c-à-d $|x(n)| < \infty$.b) Séquence tournée à droite: $x(n) = 0$ pour $n < n_1$

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

Le Domaine de convergence: est l'extérieur d'un cercle de rayon R_x^- , $|z| > R_x^-$ Exemple: $x(n) = a^n \cdot u(n) \Rightarrow X(z) = \frac{z}{z-a}$, $|z| > |a|$.c) Séquence tournée à gauche: $x(n) = 0$ $n > n_2$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n) z^{-n}$$

Le Domaine de convergence est l'intérieur d'un cercle de rayon R_x^+ , $|z| < R_x^+$ Exemple: $x(n) = -b^n \cdot u(-n-1)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -b^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} -b^{-n} \cdot z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} b^{-n} \cdot z^n$$

⑥ $X(z) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (b^{-1}z)^n = 1 - \frac{1}{1 - b^{-1}z}$ converge si $|b^{-1}z| < 1 \Rightarrow |z| < |b|$
 $= 1 - \frac{b}{b-z} = \frac{z}{z-b}$

remarque : Le domaine en z peut contenir les zéros mais pas les pôles

d) Sequence bilatérale :

$x(n) \neq 0 \quad -\infty < n < +\infty$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}}_{\text{Converge pour } |z| > R_x^-} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) z^{-n}}_{\text{Converge pour } |z| < R_x^+}$$

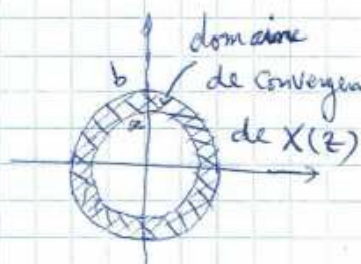
* Si $R_x^- > R_x^+ \Rightarrow X(z)$ diverge

* Si $R_x^- < R_x^+ \Rightarrow$ il y a un domaine commun $R_x^- < |z| < R_x^+$ pour lequel $X(z)$ converge.

Exemple $x(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ -b^n & n \leq -1 \end{cases} \quad |a| < |b|$
 Sequence bilatérale.

$$X(z) = \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b}$$

 Converge pour $|z| > |a|$ (pour le premier terme)
 Converge pour $|z| < |b|$ (pour le second terme)



Transformée en z inverse :

$$x(n) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{(C)} X(z) \cdot z^{n-1} dz$$

(C) : un contour fermé $\in$ au domaine de convergence.

* Si $X(z)$ est rationnelle $\Rightarrow x(n) = \sum \left\{ \text{résidus de } X(z) \cdot z^{n-1} \text{ au pôle intérieur de } C \right\}$

* $X(z) = z^{n-1} = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^s} \Rightarrow z=z_0$: pôle d'ordre s de $X(z) \cdot z^{n-1}$

* $\text{résidus}[X(z) \cdot z^{n-1} \text{ en } z=z_0] = \frac{1}{(s-1)!} \left[\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} \psi(z) \right]_{z=z_0}$

* Si $s=1 \Rightarrow \text{Res}[X(z) \cdot z^{n-1} \text{ en } z=z_0] = \psi(z_0) \cdot \frac{z^{n-1}}{z}$



Exemple : $x(n) = a^n \cdot u(n) \longleftrightarrow X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| > |a|$

$$x(n) = \frac{1}{j2\pi} \oint_C \frac{z^{n-1}}{1-az^{-1}} dz = \frac{1}{j2\pi} \oint_C \frac{z^n}{z-a} dz$$

* $n \geq 0$ $z=0$ zéro d'ordre n
 $z=a$ pôle d'ordre 1 $\in$ à l'intérieur de C

$$\Rightarrow x(n) = \text{Res} \left[\frac{z^n}{z-a} \Big|_{z=a} \right] = \left. z^n \right|_{z=a} = a^n$$

* $n < 0$, $n=-1 \Rightarrow x(-1) = \frac{1}{j2\pi} \oint_C \frac{z^{-1}}{z-a} = \oint \frac{1}{(z-a)z}$
 2 pôles (en $z=0$ et en $z=a$)

$$\left. \begin{aligned} \text{Res [en } z=a] &= \frac{1}{z} \Big|_{z=a} = a^{-1} \\ \text{Res [en } z=0] &= \frac{1}{z-a} \Big|_{z=0} = -a^{-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x(n) = 0 \text{ pour } n < 0$$

 Donc
$$x(n) = a^n \cdot u(n)$$

⑦

l'inverse par développement en série polynomiale

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

Exemple 1: $X(z) = \ln(1 + a z^{-1}) \quad |z| > a.$

en utilisant le développement en série de Taylor:

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot a^n \cdot z^{-n}$$

$$x(n) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n} & n \geq 1 \\ 0 & n < 1 \end{cases}$$

Exemple 2: $\frac{1}{1 - a z^{-1}}, \quad |z| > |a|$ (Trouver un polynôme en z^{-1}).

$$\begin{array}{r} 1 \\ a z^{-1} - 1 \quad \overline{) 1 - a z^{-1}} \\ \underline{a z^{-1} - 1} \phantom{+ a^2 z^{-2}} \\ a^2 z^{-2} - a z^{-1} \\ \underline{a^2 z^{-2} - a z^{-1}} \\ a^3 z^{-3} - a^2 z^{-2} \\ \underline{a^3 z^{-3} - a^2 z^{-2}} \\ \vdots \end{array}$$

$$X(z) = 1 + a z^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \Rightarrow x(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Exemple 3: $X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}}, \quad |z| < |a|$

$$X(z) = \frac{z}{z - a} \quad (\text{Trouver un polynôme en } z)$$

$$\begin{array}{r} z \\ -a + z \quad \overline{) -a + z} \\ \underline{-a + z} \\ -a^2 z + z \\ \underline{-a^2 z + a^2 z^2} \\ -a^3 z^2 + z \\ \underline{-a^3 z^2 + a^3 z^3} \\ \vdots \end{array}$$

$$\Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n} \Rightarrow x(n) = \begin{cases} -a^n & n \leq -1 \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

Propriétés de la transformée en z :

linéarité: $\begin{cases} x(n) \xrightarrow{T,z} X(z) \\ y(n) \xrightarrow{T,z} Y(z) \end{cases} \quad \begin{cases} R_x^- < |z| < R_x^+ \\ R_y^- < |z| < R_y^+ \end{cases}$

$$a x(n) + b y(n) \xrightarrow{T,z} a X(z) + b Y(z) \quad (\text{Somme commune})$$

Avance et Retard:

Si $x(n) \xrightarrow{T,z} X(z)$ alors $\begin{cases} x(n+1) \xrightarrow{T,z} z \cdot X(z) \text{ avance} \\ x(n-1) \xrightarrow{T,z} z^{-1} X(z) \text{ retard} \end{cases}$

et plus généralement:

$$x(n-k) \xrightarrow{T,z} z^{-k} X(z) \quad \text{et} \quad x(n+n_0) \xrightarrow{T,z} z^{n_0} X(z)$$

Exemple: $\delta(n) \xrightarrow{T,z} 1 \Rightarrow \delta(n-1) \xrightarrow{T,z} z^{-1} = \frac{1}{z} \quad 0 < |z| < \infty$

$$\delta(n+1) \xrightarrow{T,z} z \quad 0 \leq |z| < \infty$$

②

Produit par a^n

Si $x(n) \xrightarrow{T, z} X(z) \Rightarrow a^n x(n) \xrightarrow{T, z} X(a^{-1}z)$

Si $z = z_1$ est un pôle de $X(z)$ alors $a^{-1}z_1$ est un pôle de $X(a^{-1}z)$.

Multiplication par n .

Si $x(n) \xrightarrow{T, z} X(z)$ alors $n x(n) \xrightarrow{T, z} -z \frac{dX(z)}{dz}$

Transformée du conjugué :

Si $x(n) \xrightarrow{T, z} X(z)$ alors $x^*(n) \xrightarrow{T, z} X^*(z^*)$.

Déroulement inverse :

Si $x(n) \xrightarrow{T, z} X(z)$ alors $x(-n) \xrightarrow{T, z} X(z^{-1})$.

Théorème de la valeur initiale :

avec $x(n) = 0$ pour $n < 0$ alors :

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

Dém : $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = x(0) + \frac{x(1)}{z} + \frac{x(2)}{z^2} + \dots + \frac{x(n)}{z^n}$

Théorème de la somme :

Si $1 \in \text{au Domaine de convergence}$, alors :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} X(z).$$

Théorème de la valeur finale :

Si $y(n) = x(n+1) - x(n)$ est absolument sommable alors :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) = \lim_{z \rightarrow 1} Y(z), \text{ or } Y(z) = zX(z) - X(z)$$

et d'autre part $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) = x(+\infty) - x(-\infty)$

et si $x(-\infty) = 0$ Alors $x(+\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot X(z)$

La convolution :

Si $w(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) y(n-k)$

et si $x(n) \xrightarrow{T, z} X(z)$ et $y(n) \xrightarrow{T, z} Y(z)$ alors :

$$W(z) = X(z) \cdot Y(z) \quad (\text{Domaine de convergence} = \text{l'intersection}).$$

Dém : $W(z) = \sum_n w(n) z^{-n} = \sum_n \sum_k x(k) y(n-k) \cdot z^{-n}$
 $= \sum_k x(k) \cdot \sum_n y(n-k) z^{-n} = \sum_k x(k) \cdot Y(z) \cdot z^{-k}$

③

exemple 1 $y(n) = a^n \cdot u(n)$, $x(n) = u(n)$

$$Y(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} , |z| > a , \quad X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad |z| > 1$$

$$W(z) = X(z) \cdot Y(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1}{z^2 (z-a)(z-1)}$$

$$w(n) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{(c)} W(z) \cdot z^{n-1} dz = \frac{1}{j2\pi} \oint_{(c)} \frac{z^{n+1}}{(z-a)(z-1)} dz$$

$$w(n) = \frac{a^{n+1}}{a-1} + \frac{1}{1-a} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad \text{pour } n \geq 0$$

$$w(n) = 0 \quad \text{pour } n < 0$$

Convolution complexe :

$$\text{Si } w(n) = x(n) \cdot y(n) \quad \text{alors : } W(z) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{C_1} X\left(\frac{z}{v}\right) Y(v) \cdot v^{-1} dv$$

$$\text{ou } W(z) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{C_2} X(v) \cdot Y\left(\frac{z}{v}\right) \cdot v^{-1} dv$$

C_1 : $\in$ à l'intersection des domaine de $Y(v)$ et $X(\frac{z}{v})$.

C_2 : $\in$ à l'intersection des domaine de $X(v)$ et $Y(\frac{z}{v})$.

$$\text{domaine de } W(z) : R_x^- R_y^- < |z| < R_x^+ R_y^+$$

$$\text{Donc : } W(z) = \sum_n x(n) y(n) z^{-n} , \quad y(n) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{C_1} Y(v) \cdot v^{n-1} dv$$

$$W(z) = \frac{1}{j2\pi} \sum_n x(n) \oint_{C_1} Y(v) \cdot \left(\frac{z}{v}\right)^{-n} \cdot v^{-1} dv$$

$$W(z) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{C_1} \left[\sum_n x(n) \cdot \left(\frac{z}{v}\right)^{-n} \right] Y(v) \cdot v^{-1} dv$$

$$W(z) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{C_1} X\left(\frac{z}{v}\right) Y(v) \cdot v^{-1} dv$$

Exemple : Trouver $W(z)$ avec $x(n) = a^n \cdot u(n)$, $y(n) = b^n \cdot u(n)$.

Relation de Parseval :

$$w(n) = x(n) \cdot y^*(n) \Rightarrow W(z) \Big|_{z=1} = \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(v) \cdot Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right) v^{-1} dv$$

$$W(z) = \sum_n x(n) \cdot y^*(n) z^{-n}$$

$$W(z) \Big|_{z=1} = \sum_n x(n) y^*(n) = \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(v) Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right) v^{-1} dv$$

$$v = e^{j\omega} , \quad \sum_n x(n) \cdot y^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot Y^*(e^{j\omega}) d\omega$$

Fonction de transfert d'un système :

$$x(n) \rightarrow \boxed{h(n)} \rightarrow y(n)$$

$$x(n) \xrightarrow{\mathcal{T}, z} X(z) , \quad y(n) \xrightarrow{\mathcal{T}, z} Y(z) , \quad h(n) \xrightarrow{\mathcal{T}, z} H(z)$$

$$y(n) = x(n) * h(n) \Rightarrow Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

(10)

Stabilité : Le Domaine de convergence de $H(z)$ doit contenir le cercle unité : stabilité + causalité

* Domaine de Convergence contient le cercle unité et $z = +\infty$

* Converge : Stabilité + causalité $\Rightarrow$ les pôles $\in$ à l'intérieur du cercle unité

Système d'ordre N :

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \quad \text{par application de la T.Z on aura}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^N a_k Y(z) \cdot z^{-k} = \sum_{r=0}^M b_r X(z) \cdot z^{-r} \Rightarrow Y(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} X(z) \cdot \sum_{r=0}^M b_r z^{-r}$$

$$\text{d'où } H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

$$H(z) = \frac{A \cdot \prod_{k=0}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} \rightarrow \begin{cases} z = c_k \text{ zero} \\ z = 0 \text{ pole} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = d_k \text{ pole} \\ z = 0 \text{ zero} \end{cases}$$

exemple : $y(n) = a y(n-1) + x(n)$, $n > 0$

$$H(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} \quad |z| > |a|$$

$$\downarrow$$

$$h(n) = a^n \cdot u(n)$$

* pour $N=0 \Rightarrow$ pas de pôles sauf en $z=0$
et $h(n)$ est de durée finie

$$H(z) = \frac{1}{a_0} \cdot \sum_{r=0}^M b_r z^{-r} = \sum_{r=0}^M \frac{b_r}{a_0} z^{-r}$$

$$\Rightarrow h(n) = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0} & , n=0, 1, 2, \dots, M \\ 0 & \text{Ailleurs.} \end{cases}$$

* Si $N > 0 \Rightarrow H(z)$ a des pôles ; et chaque pôle va contribuer avec une séquence exponentielle.

Dans ce cas $h(n)$ est de durée infinie.

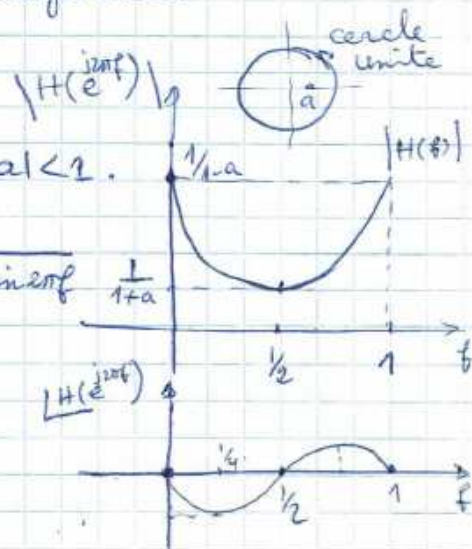
Exple : Système R.I.I

$$h(n) = a^n \cdot u(n) \Leftrightarrow H(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}}$$

pour que le système soit stable $\Rightarrow |a| < 1$.

$$H(e^{j2\pi f}) = \frac{1}{1 - a e^{-j2\pi f}} = \frac{1}{(1 - a \cos 2\pi f) + j a \sin 2\pi f}$$

$$|H(e^{j2\pi f})| = \frac{1}{\sqrt{(1 - a \cos 2\pi f)^2 + a^2 \sin^2 2\pi f}}$$



(11)

TRANSFORMÉE DE FOURIER D'UN SIGNAL DISCRET

definition :

Soit un signal discret $x(n)$. Par définition, la transformée de Fourier de $x(n)$ est donnée par :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j2\pi f n}, \quad T_e = 1 \text{ (normalisé } \Rightarrow f_e = 1 \text{)}.$$

Remarque : $X(f) = X(z) |_{z=e^{j2\pi f}}$.

* La transformée de Fourier est donc la transformée en z , calculée pour z appartenant au cercle unité.

Existence : La série de Fourier existe si $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| < \infty$ c à d :

La transformée de Fourier existe pour les signaux, absolument sommable.

Propriétés :

1. Periodicité : $X(f)$ est périodique de période = 1.

$$X(f+1) = X(f)$$

Dem : $X(f+1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi n(f+1)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi f n} \cdot e^{-j2\pi n} = X(f)$, car $e^{-j2\pi n} = 1$

2. La transformée de Fourier inverse d'un signal discret est donnée par

$$x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) \cdot e^{j2\pi f n} df.$$

$$3 \quad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi f n}$$

$$\operatorname{Re}\{X(f)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot \cos 2\pi f n \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}\{X(f)\} = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \sin 2\pi f n$$

$$\text{avec } \operatorname{Re}\{X(f)\} = \operatorname{Re}\{X(-f)\} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}\{X(-f)\} = -\operatorname{Im}\{X(f)\}$$

donc $|X(f)|$ est une fonction paire et $\angle X(f)$ est une fonction impaire de f

4. Multiplication par une exponentielle (théorème de modulation)

$$\operatorname{TF}\{x(n) \cdot e^{j2\pi f_0 n}\} = X(f-f_0)$$

$$\text{Dem}^{\text{re}} : \sum_n x(n) \cdot e^{j2\pi f_0 n} \cdot e^{-j2\pi f n} = \sum_n x(n) e^{-j2\pi (f-f_0) n} = X(f-f_0)$$

5. Transformée de Fourier des fonctions de corrélation :

La fonction de corrélation entre deux signaux $x(n)$ et $y(n)$ est donnée par :

$$R_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) y(n+k)$$

La transformée de $R_{xy}(k)$ est donnée par :

$$\Phi_{xy}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) y(n+k) \right] e^{-j2\pi f k} = X^*(f) \cdot Y(f) \quad \text{ou } X^*(f) \text{ est le conjugué de } X(f).$$

⑫

Dem : posons $l = n+k$

$$\Rightarrow \phi_{xy}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{j2\pi f n} \cdot \sum_{l=-\infty}^{+\infty} y(l) e^{-j2\pi f l} = X^*(f) \cdot Y(f)$$

donc $\phi_{xx}(f) = |X(f)|^2$.

6 Conservation du produit scalaire et relation de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |X(f)|^2 df$$

Dem 70 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) \cdot e^{j2\pi f n} df = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{j2\pi f n} \right] X(f) df$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) \cdot X^*(f) df = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |X(f)|^2 df$$

N.B $\sum x(n) y^*(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) Y^*(f) df$

7 Transformée de Fourier d'un produit

* $x(n) \cdot y(n) \xrightarrow{T.F} X(f) * Y(f) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f') Y(f-f') df'$

Dem : T.F $\{x(n), y(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f') e^{j2\pi f' n} df' \cdot y(n) \cdot e^{-j2\pi f n}$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f') \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) \cdot e^{-j2\pi (f-f') n} df' = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f') \cdot Y(f-f') df'$$

et * $x(n) * y(n) \xrightarrow{T.F} X(f) \cdot Y(f)$

Dem : $\sum_n \sum_k x(k) y(n-k) e^{-j2\pi f n} = \sum_k x(k) \sum_n y(n-k) e^{-j2\pi f n}$ posons $n = l+k$
 $n-k = l$

$$= \sum_k x(k) \cdot e^{-j2\pi f k} \cdot \sum_l y(l) e^{-j2\pi f l} = X(f) \cdot Y(f)$$

TRANSFORMEE DE FOURIER DISCRETE

Nous avons vu que la transformée de Fourier d'un signal discret est :

$$X(f) = \sum_n x(n) e^{-j2\pi f n} \quad \text{--- ① (avec } x(f) \text{ périodique de période 1)}$$

et la transformée inverse :

$$x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) e^{j2\pi f n} df \quad \text{--- ②} = \int_0^1 X(f) e^{j2\pi f n} df$$

* Le calcul numérique de ① et ② présente deux difficultés

* f : varie continuellement

* le nombre des valeurs de $x(n)$ est infini

Les solutions sont les suivantes :

— f peut être discrétisée

— $x(n)$ est supposé à durée limitée.

⑬ Pour discrétiser la fréquence f , on choisit $\Delta f = \frac{1}{N}$, c'est à dire N points entre 0 et 1, $f = (\frac{k}{N}, k=0, \dots, N)$.

⇒ ① devient $X(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$ (en notant $X(\frac{k}{N}) = X(k)$)

et ② peut être approché par :

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{k}{N} n} \quad \left(\text{car } \int \text{ devient somme} \right. \\ \left. \text{et } df \rightarrow \frac{1}{N} \right)$$

Remarque : $\hat{x}(n)$ est périodique de période N . car :

$$\hat{x}(n+N) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j2\pi \frac{k}{N} (n+N)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{k}{N} n} \cdot \underbrace{e^{j2\pi k}}_{=1} \\ = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{k}{N} n}$$

Il est donc clair que $\hat{x}(n) \neq x(n)$ puisque l'une est périodique et généralement l'autre pas.

* Examinons dans quel cas $x(n) = \hat{x}(n)$ sur une période :

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) e^{-j2\pi \frac{k}{N} m} \cdot e^{j2\pi \frac{k}{N} n}$$

$$\hat{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \cdot \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{k}{N} (m-n)} \right]$$

pour $\frac{m-n}{N} = \frac{1}{N}$ quelconque (non entier) $\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi k \frac{1}{N}} = 0$
car c'est la somme vectorielle des vecteurs $\sqrt{1}$.

Exp : $\frac{1}{N} = \frac{1}{2}$  , $\frac{1}{N} = \frac{1}{4}$ 

et pour $(m-n) = iN$ (i entier) on a : $e^{-j2\pi \frac{k}{N} (m-n)} = 1$, $\left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{k}{N} (m-n)} = 1 \right]$

d'où $\hat{x}(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(n+iN)$, ($m = n+iN$).

Par exemple, pour $n=0 \Rightarrow \hat{x}(0) = x(0) + x(N) + x(-N) + x(2N) + x(-2N) + \dots$

$\hat{x}(0) = x(0)$, si $x(N) = x(-N) = x(2N) = x(-2N) = \dots = 0$

càd si le signal $x(n)$ s'annule à partir de $n=N$.

et en définitive pour $x(n)$ s'annulant à partir de $n=N$ on a :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{k}{N} n} \quad n=0, 1, \dots, N-1$$

$$\text{et } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} \quad k=0, 1, \dots, N-1$$

en posant $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \\ X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \end{cases}$$

C'est la Transformée de Fourier discrète (TFD) d'ordre N

(14)

N.B: On peut aussi écrire la TFD sous forme matricielle, en mettant les $x(n)$ et les $X(k)$ sous forme vectorielle.

soit $x = x(n)$: vecteur colonne de dimension N $n=0, 1, \dots, N-1$

et $X = X(k)$: vecteur colonne de dimension N $k=0, 1, \dots, N-1$

d'où $X = [W_N] x$ ou $W = [W_N^{nk}]$ matrice $N \times N$

et $x = \frac{1}{N} [W]^* X$ $W^* = [W_N^{-nk}]$ matrice conjuguée de W

on vérifie que $X = \frac{1}{N} [W][W]^* X \Rightarrow W.W^* = N.I$

$$\Rightarrow W^{-1} = \frac{1}{N} . W^*$$

Propriétés de la TFD:

On s'intéresse donc aux propriétés mathématiques de:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k=0, 1, \dots, N-1 \quad \text{ou} \quad X = W \cdot x$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \quad n=0, 1, \dots, N-1 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{N} W^* X$$

1. **Periodicité:** $X(k)$ et $x(n)$ sont périodique de période N

Dém:

$$\begin{aligned} X(k+N) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n(k+N)} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} W_N^{nN} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = X(k) \quad (\text{car } W_N^{nN} = 1) \\ \text{et} \quad x(n+N) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-k(n+N)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} W_N^{-kN} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} = x(n) \quad (\text{car } W_N^{-kN} = 1) \end{aligned}$$

2. **Linéarité:** $\text{TFD} \{x(n) + \lambda y(n)\} = \text{TFD} \{x(n)\} + \lambda \text{TFD} \{y(n)\}$
 $= W \cdot x + \lambda \cdot W \cdot y$

3. **Décalage en temps (avance/retard)**

$$\text{TFD} \{x(n-m)\} = W_N^{mk} \cdot X(k)$$

$$\begin{aligned} \text{Dém: } \text{TFD} \{x(n-m)\} &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n-m) W_N^{nk}, \quad \text{on pose } n-m=l \Rightarrow n=l+m \\ &= \sum_{l=-m}^{N-1-m} x(l) W_N^{(l+m)k} = W_N^{mk} \cdot \sum_{l=-m}^{N-1-m} x(l) W_N^{lk} \end{aligned}$$

et comme $x(n)$ est périodique de période " N " on a:

$$x(-m) = x(-m+N), \quad x_{\frac{N-m}{N}}^{(m+1)} = x(-m+1+N), \dots, \quad x_{-1} = x(N-1)$$

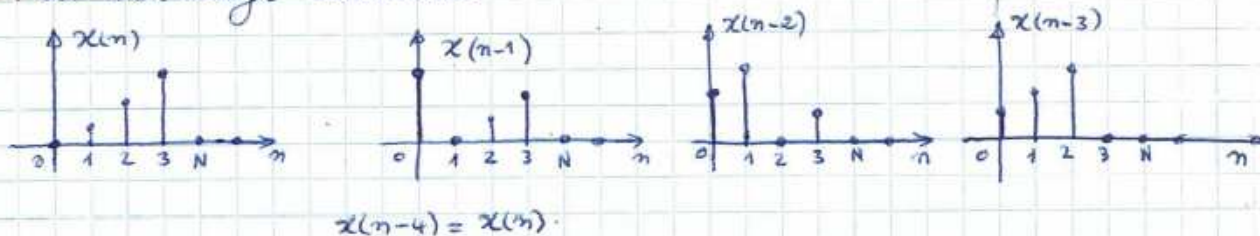
$$\text{et } W_N^{(l+N)k} = W_N^{lk}$$

$$\Rightarrow \text{TFD} \{x(n-m)\} = W_N^{mk} \cdot \sum_{l=0}^{N-1} x(l) W_N^{lk} = W_N^{mk} \cdot X(k)$$

Remarque: Une difficulté se présente lorsqu'on applique la TFD à une suite $x(n)$ non périodique de durée N . Le résultat ci-dessus reste valable en utilisant la notion de décalage circulaire.

13)

Exemple: de décalage circulaire



4. Décalage en fréquence :

Par raisonnement identique à celui du paragraphe précédent, on obtient :

$$\text{TFD}^{-1} \{ X(k-m) \} = W_N^{-mn} \cdot x(n).$$

5. Convolution circulaire :

$$\text{TFD} \{ x(n) \otimes y(n) \} = X(k) \cdot Y(k) \quad \text{car :}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \text{TFD} \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} x(m) y(n-m) \right\} &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \text{TFD} \{ y(n-m) \} = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \cdot W_N^{mk} \cdot Y(k) \\ &= X(k) \cdot Y(k). \end{aligned}$$

et d'une manière homologue, on obtient pour la convolution en fréquence :

$$\frac{1}{N} \text{TFD}^{-1} \left\{ \sum_{l=0}^{N-1} X(l) Y(k-l) \right\} = x(n) \cdot y(n)$$

6. Conservation du produit scalaire et relation de Parseval :

$$\text{si } X(k) = \text{TFD} \{ x(n) \}$$

$$\text{et } Y(k) = \text{TFD} \{ y(n) \} \quad \text{alors :}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{N} W^* X \\ y &= \frac{1}{N} W^* Y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \langle x, y^* \rangle = x^T \cdot y^* = \frac{1}{N^2} \cdot X^T \cdot W^{*T} \cdot W Y^*$$

$$\text{or } W = W^T \quad \text{et } W W^* = N I \quad \text{alors :}$$

$$\langle x, y^* \rangle = \frac{1}{N} X^T \cdot Y^*$$

$$\text{càd : } x^T \cdot y^* = \frac{1}{N} X^T \cdot Y^* \quad (\text{c'est la conservation du produit scalaire}).$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot Y^*(k)$$

Si $x(n) = y(n)$ alors on a :

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{c'est la relation} \\ \text{de Parseval} \end{array} \right)$$

(16)

TRANSFORMEE DE FOURIER RAPIDE (TFR)

ou FFT (Fast Fourier Transform).

* Le calcul de $X(k)$ $\{k=0, \dots, N-1\}$ requiert (dans le cas où $x(n)$ est réel) puisque W_N^{mk} est complexe, N^2 additions et $2N^2$ multiplications (sans tenir compte des valeurs particulières prises par W_N^{mk}).

* La TFR (ou FFT) est un algorithme qui ne requiert que $N \cdot m$ additions et $\frac{N}{2} \cdot (m-1)$ multiplications (N est choisi égale à 2^m)

Exemple:

Si $N = 1024 = 2^{10}$, la FFT implique $512 \times 9 \approx 4500$ multiplications au lieu de $2 \cdot 10^6$ pour un calcul non optimisé de TFD.

Principe de Calcul de FFT

$x(n)$ est décomposée en 2 suites entrelacées $\{x(2i)$ les termes pairs et $\{x(2i+1)$ les termes impairs} d'où

$$X(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i) W_N^{k2i} + \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1) W_N^{k(2i+1)}$$

et comme $W_N^2 = W_{N/2} \Rightarrow X(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i) W_{N/2}^{ki} + W_N^k \cdot \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1) W_{N/2}^{ki} \quad k=0, \dots, N-1$

Le calcul de $X(k)$ se décompose en 2 calculs de TFD d'ordre $N/2$, (période $N/2$) qui requiert chacun $\left(\frac{N}{2}\right)^2$ additions et $2\left(\frac{N}{2}\right)^2$ multiplications, auquel s'ajoutent pour la multiplication par W_N^k , $\frac{N}{2}$ additions et $\frac{N}{2}$ multiplications. Ceci donne donc :

$$2 \left(\frac{N}{2}\right)^2 + \frac{N}{2} \text{ additions, au lieu de } N^2$$

$$\text{et } 4 \left(\frac{N}{2}\right)^2 + N/2 \text{ multiplications, au lieu de } 2N^2$$

* On a donc, de cette manière, réduit le nbre d'opérations à effectuer

* En choisissant $N = 2^m$, et en recommençant le processus

Ci-dessus, on peut décomposer le calcul d'une TFD d'ordre N en $(m-1)$ calculs de TFD d'ordre $\frac{N}{2}, \frac{N}{4}, \dots, 2$

* En fait, en ordonnant les calculs de la manière qui suit et en tenant compte que $W_N^N = 1$ et $W_N^{N/2} = -1$, on peut ramener le nombre de calculs, pour chaque étape (il y a m étapes) à N additions et $N/2$ multiplications.

(17) Exemple: Dans le cas ou $N = 8 = 2^3$

$\{X(k) \mid k = 0, \dots, N-1\}$ peut aussi s'écrire sous forme matricielle.

$$X(k) = W \cdot x$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \end{bmatrix} = [W] \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix}$$

avec $[W] =$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 & w^6 & w^7 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 & w^8 & w^{10} & w^{12} & w^{14} \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 & w^{12} & w^{15} & w^{18} & w^{21} \\ 1 & w^4 & w^8 & w^{12} & w^{16} & w^{20} & w^{24} & w^{28} \\ 1 & w^5 & w^{10} & w^{15} & w^{20} & w^{25} & w^{30} & w^{35} \\ 1 & w^6 & w^{12} & w^{18} & w^{24} & w^{30} & w^{36} & w^{42} \\ 1 & w^7 & w^{14} & w^{21} & w^{28} & w^{35} & w^{42} & w^{49} \end{bmatrix}, w = e^{-j\frac{2\pi}{8}}$$

on remarque que $w^8 = 1$, $w^4 = -1 \Rightarrow w^7 = -w^3$, $w^6 = -w^2$, $w^5 = -w$

$$\Rightarrow [W] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 & -1 & -w & -w^2 & -w^3 \\ 1 & w^2 & -1 & -w^2 & 1 & w^2 & -1 & -w^2 \\ 1 & w^3 & -w^2 & w & -1 & -w^3 & w^2 & -w \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -w & w^2 & -w^3 & -1 & w & -w^2 & w^3 \\ 1 & -w^2 & -1 & w^2 & 1 & -w^2 & -1 & w^2 \\ 1 & -w^3 & -w^2 & -w & -1 & w^3 & w^2 & w \end{bmatrix}$$

En effectuant le produit $[W] \cdot x(n) \Rightarrow$ on aura :

$$X(0) = [x(0) + x(4)] + [x(2) + x(6)] + [x(1) + x(5)] + [x(3) + x(7)]$$

$$X(1) = [x(0) - x(4)] + w \cdot [x(2) - x(6)] + w \cdot [x(1) - x(5)] + w^3 [x(3) - x(7)]$$

$$X(2) = [x(0) + x(4)] - [x(2) + x(6)] + w^2 [x(1) + x(5)] - w^2 [x(3) + x(7)]$$

$$X(3) = [x(0) - x(4)] - w^2 [x(2) - x(6)] + w^3 [x(1) - x(5)] + w [x(3) - x(7)]$$

18

$$X(4) = [x(0) + x(4)] + [x(2) + x(6)] - [x(1) + x(5)] - [x(3) + x(7)]$$

$$X(5) = [x(0) - x(4)] + w^2[x(2) - x(6)] - w[x(1) - x(5)] - w^3[x(3) - x(7)]$$

$$X(6) = [x(0) + x(4)] - [x(2) + x(6)] - w^2[x(1) + x(5)] + w^2[x(3) + x(7)]$$

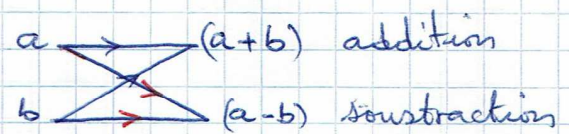
$$X(7) = [x(0) - x(4)] - w^2[x(2) - x(6)] - w^3[x(1) - x(5)] - w[x(3) - x(7)]$$

* Remarque : Les 4 dernier termes sont identiques aux 4 premiers, aux signes moins près, qui apparaissent devant les termes impairs.

* Il est usuel de représenter ceci sur un schéma à coisillons, qui permet de comprendre la décomposition et de compter facilement les opérations

* La cellule de base s'appelle

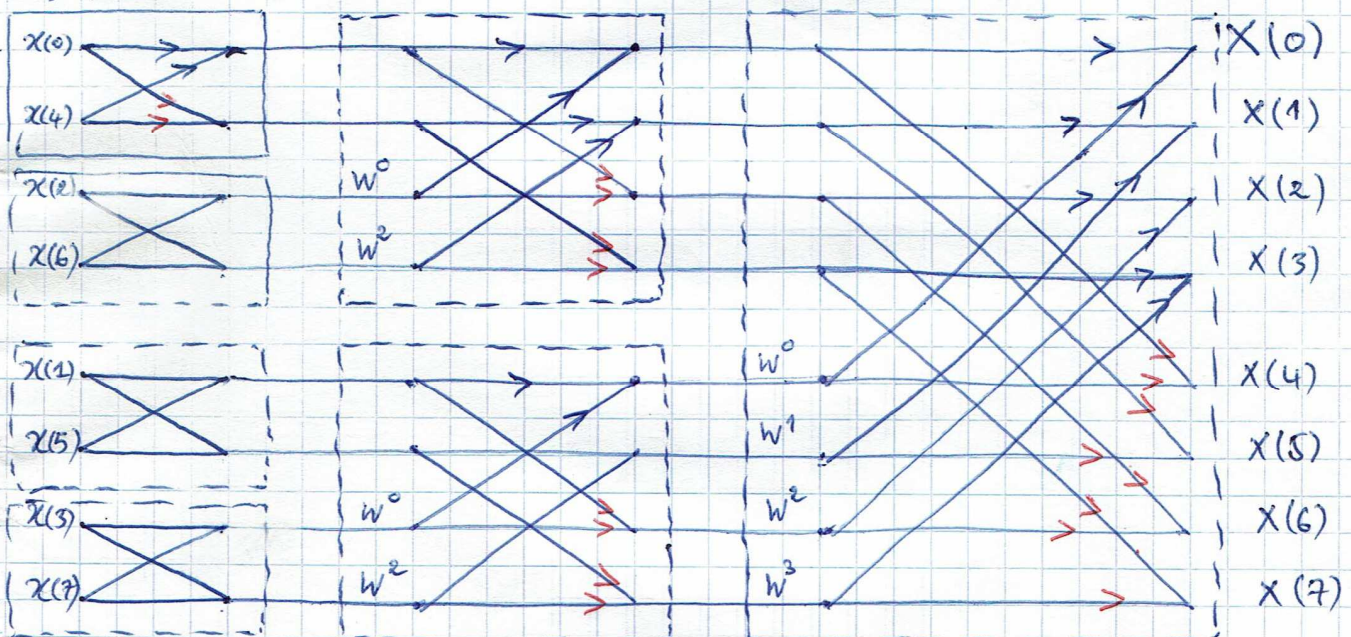
Croisillon ou "butterfly"



Les TFD d'ordre 2

Les TFD d'ordre 4

TFD d'ordre 8



8 additions
et
soustraction

↓
4
multiplication

8 additions et
soustraction

↓
4
multiplication

↓
8 additions et
soustraction

donc on a bien : $N \cdot m = 8 \times 3 = 24$ addition ou soustraction,
et $\frac{N}{2} \cdot (m-1) = 4 \times 2 = 8$ multiplication