

Chapitre2 Analyse et synthèse des filtres analogiques

2.1 Introduction

Le filtrage consiste à atténuer certains signaux et à en laisser "passer" d'autres. Cette sélection s'opère bien évidemment en fonction des caractéristiques du signal recherchées en sortie.

Le filtre est un système linéaire et stationnaire qui laisse passer certaine fréquence d'un signal d'entrée et atténue ou élimine les autres. Un filtre est donc un sélecteur de fréquence, et la bande de fréquences transmises est appelée la bande passante du filtre.

Les filtres sont utilisés dans tous les systèmes d'électroniques, par exemple tels que les systèmes de télécommunication (téléphone, télévision, radio,...), les systèmes d'acquisition et de traitement de signaux physiques (surveillance médicale, ensemble de mesure, radars...)

2.1 Classification des filtres

A. Selon leurs natures

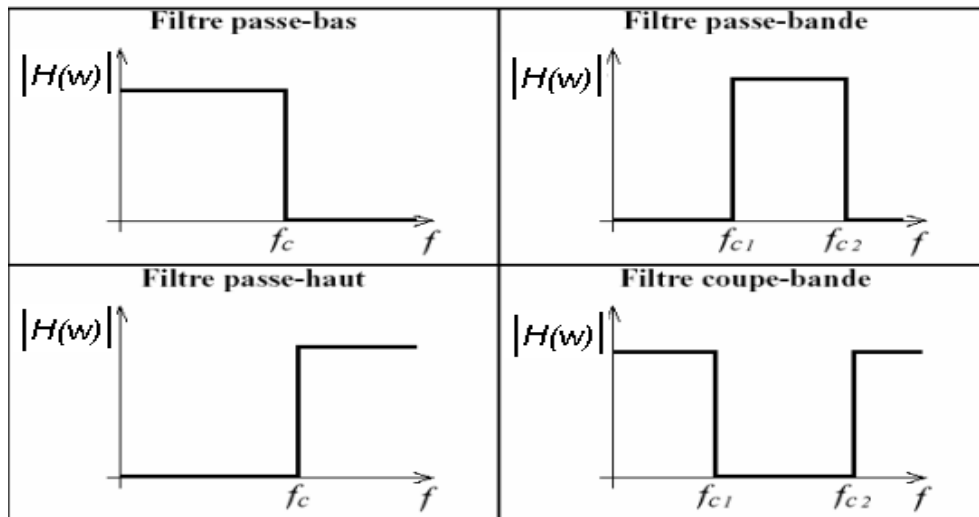
On distingue les filtres Analogiques/Numériques, et selon leurs composants de réalisation, on distingue les filtres actifs et les filtres passifs.

TYPE	COMPOSANTS	SPECIFITES
Filtre numérique	Circuits logiques intégrés	▶ Signaux numérisés ▶ $F < 100\text{MHz}$ ▶ convient en grande série ▶ entièrement programmable
Filtres passifs	Circuit discret L et C, Composants piézoélectriques (quartz)	▶ F élevée ▶ pas d'alimentation ▶ non intégrable
Filtres actifs	AIL, R et C	▶ $F < 1\text{ MHz}$ ▶ besoin d'alimentation ▶ tension filtrée faible $< 12\text{V}$
Filtres à capacité commutée	AIL, Interrupteur commandé MOS, R et C intégré	▶ $F < \text{qq MHz}$ ▶ besoin d'alimentation ▶ intégrable ▶ fréquence programmable

B. Suivant la bande de fréquences transmises

Suivant le domaine de fréquences éliminées, on classe les filtres en quatre catégories : passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe bande.

- ✓ **Filtre passe bas** : il laisse passer les fréquences basses, il isole les signaux hautes fréquences.
- ✓ **Filtre passe haut** : il laisse passer les fréquences hautes, il isole les signaux basses fréquences.
- ✓ **Filtre passe bande** : il favorise les signaux situés dans une bande de fréquences.
- ✓ **Filtre coupe-bande** (réjecteur) : un filtre empêchant le passage d'un intervalle de fréquences.



Le tableau suivant récapitule les bandes passantes des différents filtres.

Type de filtre	Bande passante B
Passe Bas	$B=[0, f_c]$
Passe Haut	$B = [f_c, +\infty[$
Passe Bande	$B=[f_{c1}, f_{c2}]$
Coupe Bande	$B=[0, f_{c1}] \cup [f_{c2}, +\infty[$

2.2 Filtre idéal et filtre réel

Un filtre idéal présente :

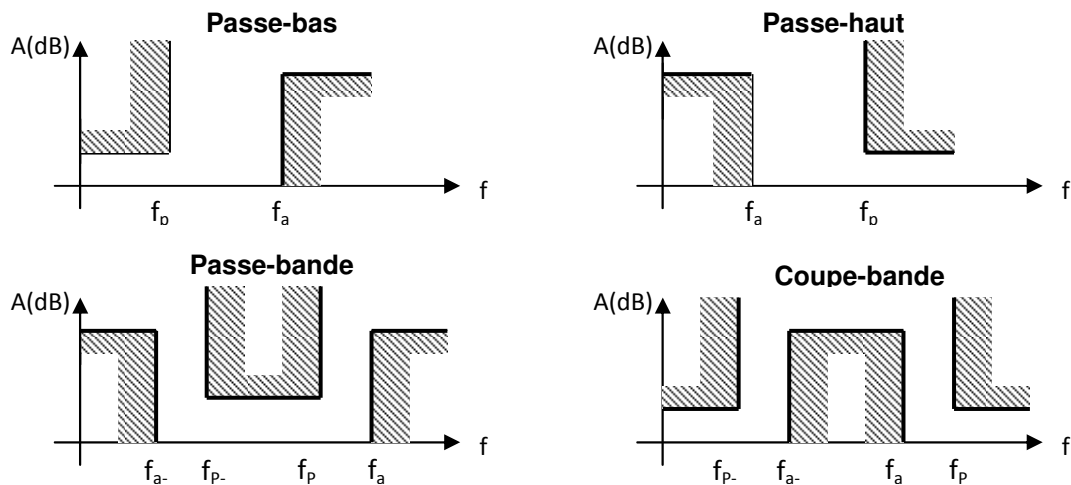
- un affaiblissement nul dans la bande de fréquence que l'on désire conserver (Bande passante)
- un affaiblissement infini dans la bande que l'on désire éliminer (Bande atténuée).

Il est impossible pratiquement de réaliser de tels filtres. Aussi se contente-t-on d'approcher cette réponse idéale en :

- conservant l'atténuation A inférieure à A_{max} dans la bande passante
- conservant l'atténuation supérieure à A_{min} dans la bande atténuée

Cela conduit ainsi à définir un *gabarit* définissant des zones interdites et des zones dans lesquelles devront impérativement se situer les graphes représentant l'atténuation du filtre en fréquence.

Suivant le type de réponse que l'on désire obtenir, on est amené à définir 4 familles de filtres :



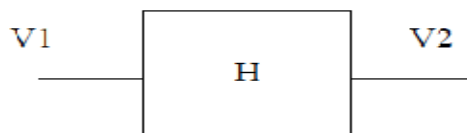
Où :

f_p : fréquence de coupure.

f_a : fréquence de frontière

2.2.1 Notion de la fonction de transfert d'un filtre

Le comportement d'un filtre est défini par l'étude fréquentielle de la fonction de transfert entre la tension de sortie et la tension d'entrée du filtre.



$$H(j\omega) = \frac{V_2}{V_1}$$

$$H_{dB} = 20 \cdot \log \left| \frac{V_2}{V_1} \right| \quad \text{et } \varphi = \text{argument}[H(j\omega)]$$

- **Notion d'ordre** : La notion d'ordre d'un filtre dépendra de l'exposant de $(j\omega)$, qui se trouvera dans le dénominateur de la fonction de transfert :

- ordre1 : présence de $(j\omega)$,
- - ordre2 : présence de $(j\omega)^2$,
- - ordre3 : présence de $(j\omega)^3$,
- - ordre n : présence de $(j\omega)^n$.

2.2.2 Filtres du premier ordre

Une fonction de transfert du 1er ordre d'un filtre analogique a au dénominateur, un polynôme de degré 1 en $(j\omega)$. Les filtres d'ordre 1 sont représentés par des fonctions de transfert dont la forme générale est la suivante :

$$H(j\omega) = \frac{a_0 + a_1 j\omega}{b_0 + b_1 j\omega}$$

Les filtres à gain k de types passe-bas, passe-haut, correcteur et simple déphaseur sont décrits par les fonctions de transfert suivantes :

Type de filtre	Fonction de transfert
Passe-bas	$H(j\omega) = k \cdot \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$
Passe-haut	$H(j\omega) = k \cdot \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$
Correcteur	$H(j\omega) = k \cdot \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$
Simple déphaseur	$H(j\omega) = k \cdot \frac{1 - j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$

Remarque : On s'intéresse aux filtres passe-bas et passe-haut.

2.2.3 Filtres du deuxième ordre

Une fonction de transfert du 2ème ordre d'un filtre analogique s'écrit comme suit :

$$H(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{1 + \frac{1}{Q_0} \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Où : $N(j\omega)$ est polynôme d'ordre $m \leq 2$.

Le Tableau suivants présente les fonctions de transfert des filtres du deuxième ordre.

Type de filtre	Fonction de transfert1	Fonction de transfert2
Passe-bas	$H(j\omega) = k \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{Q_0} \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$	$H(j\omega) = k \cdot \frac{1}{1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$
Passe-haut	$H(j\omega) = k \cdot \frac{\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)}{1 + \frac{1}{Q_0} \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$	$H(j\omega) = k \cdot \frac{\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)}{1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$
Passe-bande	$H(j\omega) = k \cdot \frac{\frac{1}{Q_0} \frac{j\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{1}{Q_0} \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$	$H(j\omega) = k \cdot \frac{2\xi \frac{j\omega}{\omega_0}}{1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$
Coupe bande	$H(j\omega) = k \cdot \frac{1 + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)}{1 + \frac{1}{Q_0} \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$	$H(j\omega) = k \cdot \frac{1 + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)}{1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$
Passe-tout	$H(j\omega) = K \cdot \frac{1 - j \frac{1}{Q_0} \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + \frac{1}{Q_0} \frac{\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$	$H(j\omega) = K \cdot \frac{1 - 2\xi j \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2\xi j \frac{\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$

Dans le tableau précédent le dénominateur est identique pour les 5 fonctions de transfert complexes.

Les grandeur ξ et Q_0 sont respectivement le coefficient d'amortissement du filtre (indique si le filtre est résonnant ou non) et le facteur de qualité. K est le gain du filtre.

Avec :

$$2\xi = \frac{1}{Q_0}$$

2.3 Analyse temporelle des filtres analogiques

2.3.1 Analyse temporelle d'un filtre passe pas du premier ordre

La fonction de transfert d'un filtre passe-bas est donnée par :

$$H(j\omega) = \frac{k}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

k est le gain ; ω_0 est la pulsation propre ; ω est la pulsation en radian par seconde.

On définit la fonction de transfert FT par le rapport :

$$H(j\omega) = \frac{V_s(j\omega)}{V_e(j\omega)}$$

$$H(j\omega) = \frac{V_s(j\omega)}{V_e(j\omega)} = \frac{k}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \Rightarrow v_s(t) + \frac{1}{\omega_0} \frac{dv_s(t)}{dt} = k.v_e(t)$$

L'équation différentielle d'un filtre du premier ordre est donnée par :

$$\frac{\tau}{k} \cdot \frac{dv_s(t)}{dt} + \frac{1}{k} \cdot v_s(t) = v_e(t)$$

Avec τ la constante du temps donné par : $\tau = \frac{1}{\omega_0}$

Réponse indicielle : lorsque le signal d'entrée est un saut de tension appliqué à l'instant $t = 0$. C'est à dire :

$$v_e(t) = a.u(t)$$

La solution générale de l'équation différentielle sera :

$$v_s(t) = k.a \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Caractéristiques de la réponse indicielle :

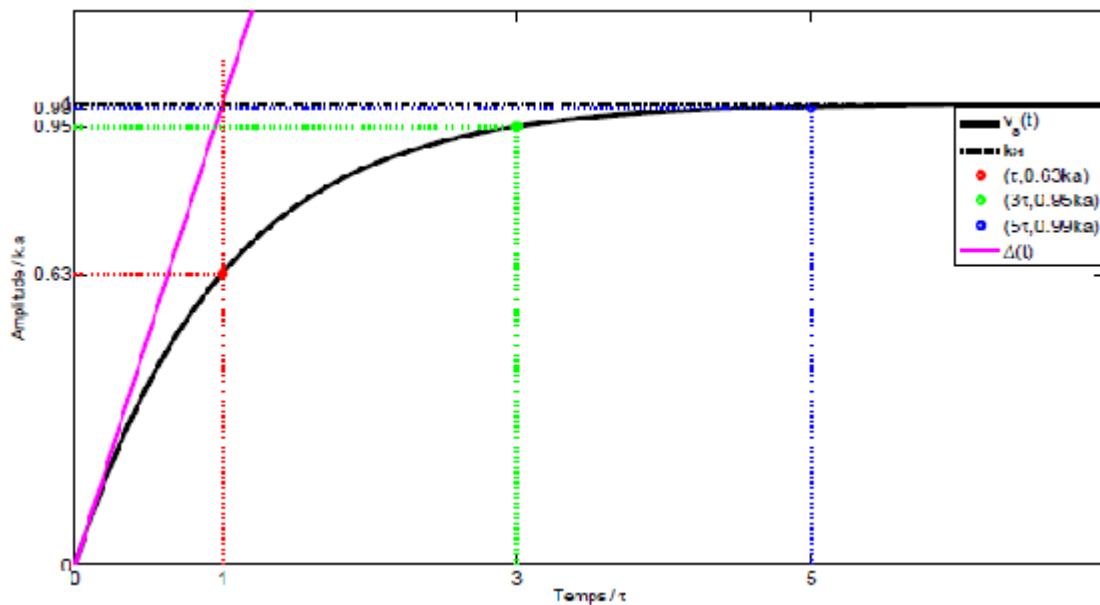
- Valeur initiale : $\lim_{t \rightarrow 0} v_s(t) = 0$
- Valeur finale : $\lim_{t \rightarrow +\infty} v_s(t) = k.a$
- Dérivée au point zéro : $\left. \frac{dv_s(t)}{dt} \right|_{t=0} = \tau.k.a$
- la tangente $\Delta(t)$ est définie par la relation : $\Delta(t) = \tau.k.a.t$
- Valeurs particulières :
 - $v_s(t = \tau) = 0,63.k.a$

La constante de temps à $t = \tau$ atteint 63% de la valeur finale.

$$v_s(t = 3.\tau) = 0,95.k.a$$

$$v_s(t = 5.\tau) = 0,99.k.a$$

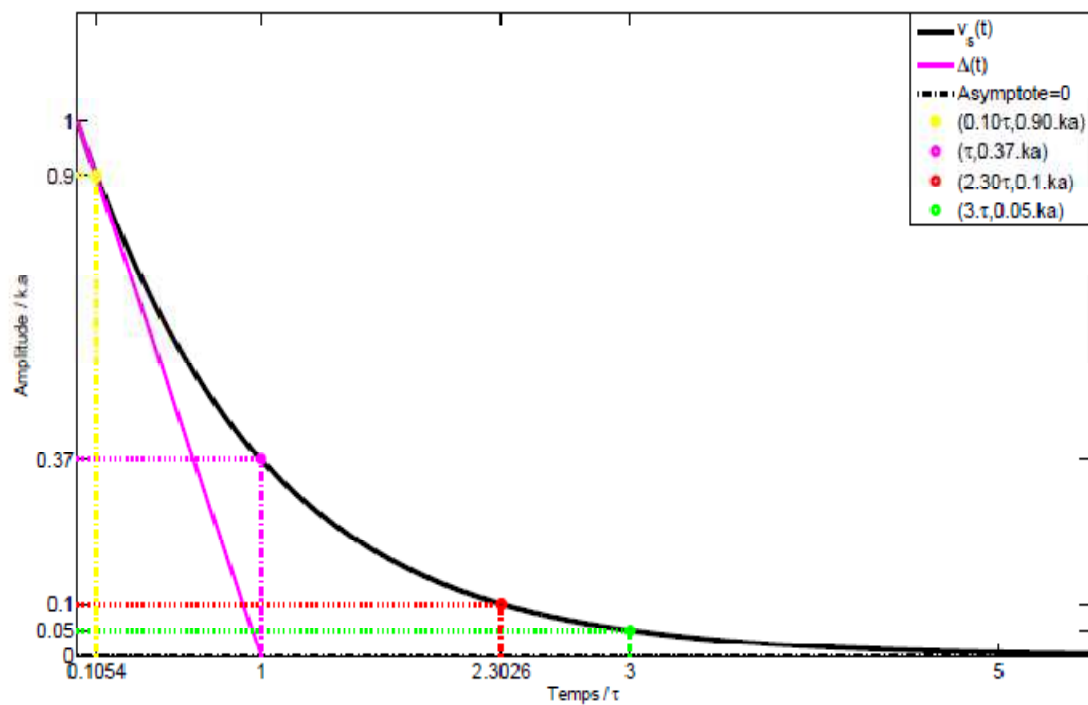
- Asymptote : $\lim_{t \rightarrow +\infty} v_s(t) = k.a$



Réponse indicielle du filtre passe pas d'ordre 1

Réponse indicielle d'un filtre passe-haut

1. *Fonction de transfert* : $H(jw) = k \cdot \frac{j \frac{w}{w_0}}{1 + j \frac{w}{w_0}}$
2. *Equation différentielle* : $\frac{1}{k \cdot \tau} v_s(t) + \frac{1}{k} \cdot \frac{dv_s(t)}{dt} = \frac{dv_e(t)}{dt}$
3. *Réponse indicielle* : $v_s(t) = k \cdot a \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$
 - Asymptote : $\lim_{t \rightarrow +\infty} v_s(t) = 0$



Réponse indicielle du filtre passe haut du premier ordre.

2.4 Analyse fréquentielle des filtres analogiques

2.4.1 Les courbes de Bode

Les courbes de Bode d'un filtre sont tout simplement les courbes illustrant la variation en fonction de la fréquence du module et de la phase de la fonction de transfert.

Pour le gain H , on préfère tracer le gain en décibel $H_{dB} = 20 \log(H)$ avec une échelle logarithmique sur l'axe des fréquences. Le tracé de cette courbe est rendu très simple par le comportement asymptotique de H_{dB} quant $f \rightarrow 0$ et quant $f \rightarrow \infty$ et aussi par la connaissance de H_{dB} au point $f = f_c$. Si on prend $k = 1$ pour faciliter l'écriture :

$$H_{dB} = 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}\right) = -20 \log \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} = -10 \log(1 + u^2) \quad \text{avec } u = \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{f}{f_c}$$

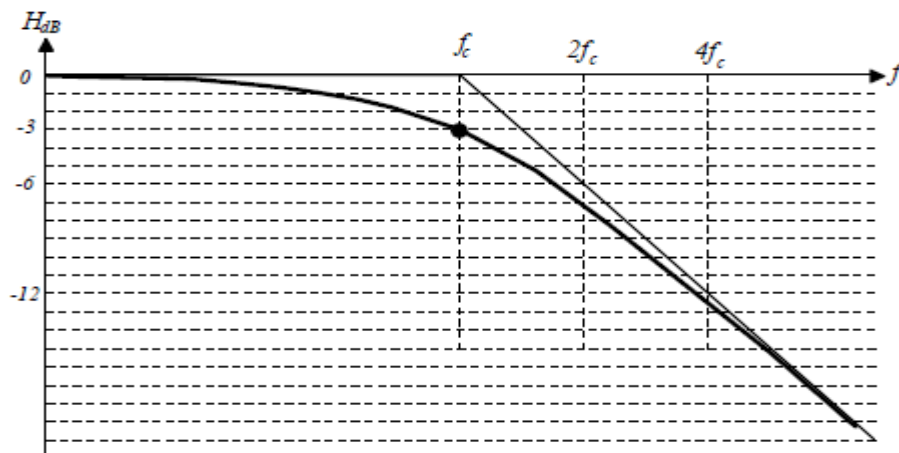
- $f \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0 \Rightarrow H_{dB} \rightarrow 0$
- $f \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow \infty \Rightarrow 1 + u^2 \rightarrow u^2 \Rightarrow H_{dB} \rightarrow -10 \log(u^2)$

Ce qui correspond (sur échelle logarithmique) à une droite (asymptote) de pente -6 dB / octave , c'est à dire le gain H_{dB} chute de 6 dB chaque fois que la fréquence double. En effet :

$$H_{dB}(2u) - H_{dB}(u) = -10 \log(2u)^2 + 10 \log u^2 = 10 \log \frac{u^2}{4u^2} = -6 \text{ dB}$$

Cette asymptote coupe l'axe des x au point $f = f_c$, en effet :

$$-10 \log u^2 = 0 \Rightarrow u = 1 \quad f = f_c$$



Si k est différent de 1, on obtient

$$H_{dB} = 20 \log(k) - 10 \log(1 + u^2)$$

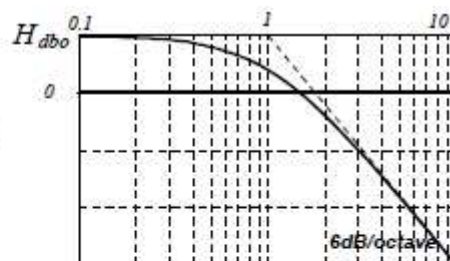
$$f \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0 \Rightarrow H_{dB} \rightarrow 20 \log(k) = H_{dB0}$$

Il suffit de décaler la courbe précédente verticalement.

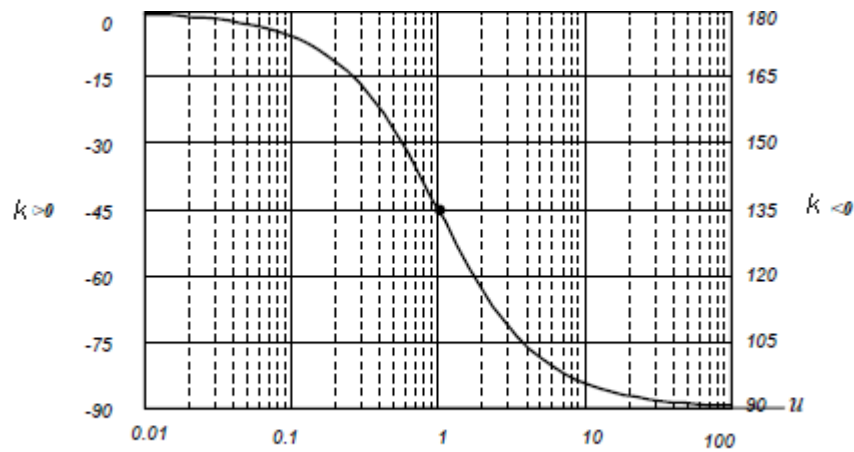
Pour la phase, on obtient :

- $k > 0 \Rightarrow \phi(\omega) = -\text{Arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$
 - $\omega \rightarrow 0 \quad \phi = -\text{arctg}(0) = 0$
 - $\omega = \omega_c \quad \phi = -\text{arctg}(1) = -45^\circ$
 - $\omega \rightarrow \infty \quad \phi = -\text{arctg}(\infty) = -90^\circ$

- $k < 0 \Rightarrow \phi(\omega) = \pi - \text{Arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$



Il faut ajouter 180° aux valeurs précédentes, on obtient la courbe ci-dessus

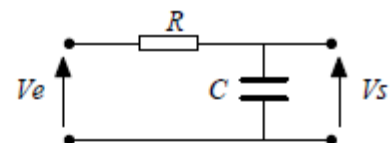


: Courbe de phase $\phi(f)$ d'un filtre passe bas du premier ordre

Réalisation par un filtre passif

Les filtres passifs doivent leur nom au fait qu'ils n'utilisent que des composants passifs comme des résistances des capacités et des selfs.

Pour déterminer la fonction de transfert du filtre, il suffit de se rappeler que l'impédance d'une capacité est $1/jC\omega$ et d'appliquer la règle du diviseur de potentiel :



Filtre passif passe bas

$$V_s = \frac{1/jC\omega}{1/jC\omega + R} V_e$$

d'où

$$H(\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Le module est : $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}$

La phase est : $\phi(\omega) = -\text{Arctg}(RC\omega)$

La pulsation de coupure est $\omega_c = \frac{1}{RC}$, et la fréquence de coupure est $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$

A.N. :

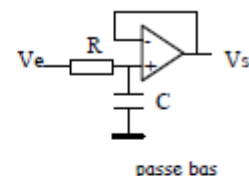
Filtre : $R = 16 \text{ k}\Omega$, $C = 10 \text{ nF}$

Signal d'entrée : signal sinusoïdal d'amplitude $A = 5V$ et de fréquence $f_m = 2 \text{ kHz}$.

- La fréquence de coupure est $f_c = \frac{1}{2\pi RC} = 944.7 \text{ Hz} \approx 1 \text{ kHz}$
- Pour les courbes, il suffit d'adapter l'axe des x de courbes précédentes en plaçant $f_c = 1 \text{ kHz}$.
- Le module du gain à la fréquence f_m est $H(f_m) = 0.4252$
- L'argument du gain à la fréquence f_m est $\phi(f_m) = -1.1317 \text{ rad} = -64.84^\circ$
- Le signal de sortie aura donc une amplitude de $0.4252 \times 5 = 2.126$, il est retardé par rapport au signal d'entrée de $1.132 \text{ rad} = 64.84^\circ$. Pour avoir le retard en temps, il suffit de se rappeler que pour un signal sinusoïdal, on a $\phi = \omega t$. D'où retard = $1.132 / (2\pi \cdot 2000 \text{ Hz}) \text{ s} = 0.09 \text{ ms}$

Réalisation par un filtre actif

Pour réaliser ce filtre, nous avons le choix entre deux structures simples :



passe bas

Première structure :

Ce filtre a exactement les mêmes caractéristiques que le filtre passif du premier ordre. Elle a seulement l'avantage d'être suivi par un amplificateur suiveur à très haute impédance d'entrée et très faible impédance de sortie. De cette façon, ses caractéristiques ne sont pas altérées par les composants qui seront reliés à sa sortie.

Rappelons que les caractéristiques de ce filtre sont :

- Fréquence de coupure : $\omega_c = \frac{1}{RC}$, $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$

- Fonction de transfert
$$H(\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_c}}$$

- Module de la fonction de transfert (gain) :

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f^2}{f_c^2}}}$$

- Argument de la fonction de transfert (phase) :

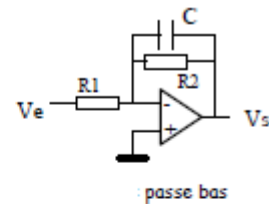
$$\phi(\omega) = -\text{Arctg}(RC\omega) = -\text{Arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = -\text{Arctg}\left(\frac{f}{f_c}\right)$$

Deuxième structure :

Pour déterminer la fonction de transfert, on va noter $Z_2 = R_2 \parallel C$

$$Z_2 = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{jC\omega}}{R_2 + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R_2}{1 + jR_2 C \omega}$$

La fonction de transfert est :
$$\frac{V_s}{V_e} = H(\omega) = -\frac{Z_2}{R_1} = -\frac{R_2/R_1}{1 + jR_2 C \omega}$$



- La fréquence de coupure est :
$$\omega_c = \frac{1}{R_2 C} \quad , \quad f_c = \frac{1}{2\pi R_2 C}$$

- Module de la fonction de transfert (gain) :

$$|H(\omega)| = \frac{R_2/R_1}{\sqrt{1 + R_2^2 C^2 \omega^2}} = \frac{R_2/R_1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} = \frac{R_2/R_1}{\sqrt{1 + \frac{f^2}{f_c^2}}}$$

Les Filtre passe-haut du premier ordre

Ce sont les filtre dont la fonction de transfert est de la forme :

$$H(p) = \frac{k \frac{p}{\omega_0}}{1 + \frac{p}{\omega_0}} \quad \text{soit} \quad h(\omega) = \frac{k \frac{j\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Le module de la fonction de transfert est :

$$|H(\omega)| = \frac{k \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

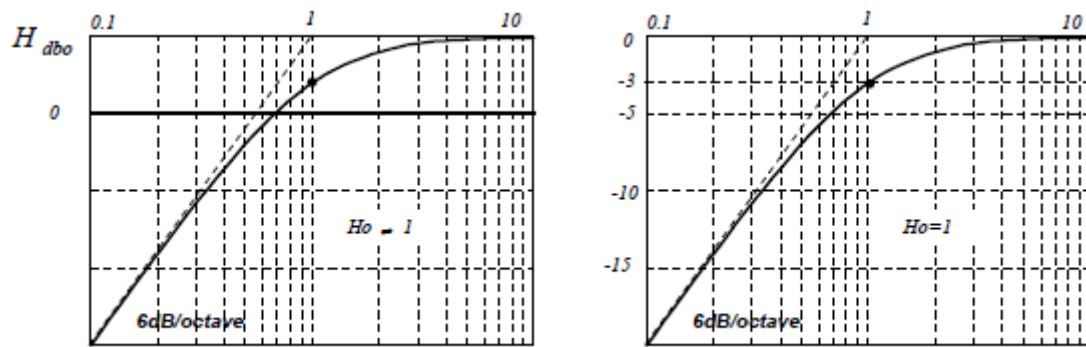
La phase de la fonction de transfert est :

$$\phi(\omega) = s \frac{\pi}{2} - \text{Arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad \begin{cases} k > 0 \Rightarrow s = 1 \\ k < 0 \Rightarrow s = -1 \end{cases}$$

Courbes de réponse :

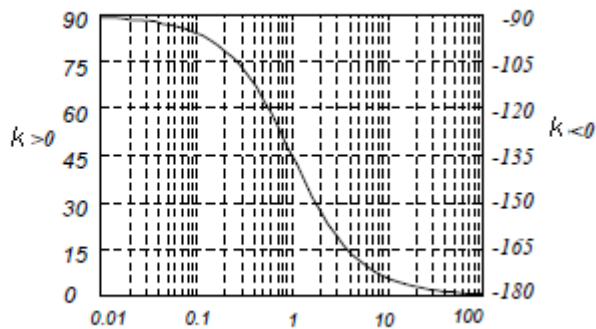
$$H_{dB} = 20 \log(k) + 20 \log \frac{\omega}{\omega_c} - 10 \log\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right) = 20 \log(k) + 20 \log u - 10 \log(1 + u^2)$$

- $f \rightarrow 0$, $H_{dB} \rightarrow 20 \log(k) + 20 \log(u)$, ce qui correspond à une asymptote +6 dB / octave coupant la ligne horizontale $20 \log(k)$ au point $u=1$ c.a.d $f = f_c$
- $f \rightarrow \infty$, $H_{dB} \rightarrow 20 \log u - 10 \log u^2 = 0$



Courbe de gain d'un filtre passe haut du premier ordre

Pour la phase, la plage de variation dépend du signe de k :

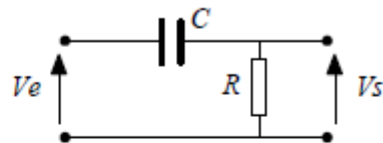


Courbe de phase d'un filtre passe haut du premier ordre

Réalisation par un filtre passif

La fonction de transfert est :

$$H(\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$



Filtre passe-haut

La pulsation de coupure est $\omega_c = \frac{1}{RC}$. $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$

Le module est $|H(\omega)| = \frac{RC\omega}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} = \frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^2}} = \frac{\frac{f}{f_c}}{\sqrt{1 + (\frac{f}{f_c})^2}}$

La phase est $\phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$

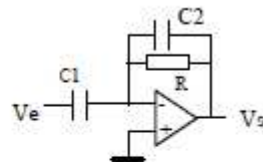
Si on applique un signal $m(t) = A \cos(2\pi f_m t)$ avec $A = 5$ et $f_m = 2 \text{ kHz}$, alors le signal de sortie aura une amplitude $A \times H(f_m) = 5 \times 0.905 = 4.525$ et sera déphasé (en avance) de $\phi(f_m) = 0.439 \text{ rad}$.

Réalisation par filtre actif

Pour déterminer la fonction de transfert, on va noter $Z_2 = R // C_2$

$$Z_2 = \frac{R \cdot \frac{1}{jC_2\omega}}{R + \frac{1}{jC_2\omega}} = \frac{R}{1 + jRC_2\omega}$$

La fonction de transfert est $H(\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{Z_2}{Z_1}$



passe haut actif

$$H(\omega) = - \frac{jRC_2\omega}{1 + jRC_2\omega}$$

- La fréquence de coupure est : $\omega_c = \frac{1}{RC_2}$, $f_c = \frac{1}{2\pi RC_2}$

Les Filtres passe-bas du second ordre

Les filtres passe-bas de second ordre ont une fonction de transfert de la forme :

$$H(p) = \frac{h_0}{1 + 2\zeta \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} \quad H(\omega) = \frac{h_0}{1 + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_0} + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

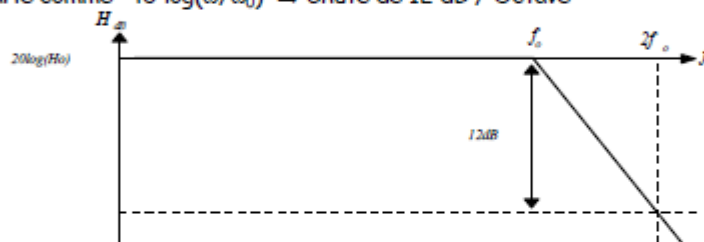
- ω_0 : Pulsation caractéristique dite aussi pulsation naturelle ou de brisure. Nous l'appellerons aussi pulsation de coupure bien que cela ne soit pas très exact.
- ζ : Coefficient d'amortissement = $1/2Q$ avec Q : Coefficient de surtension
- ω_r : Pulsation de résonance = $\omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$

Module :

$$H = \frac{H_0}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$H_{dB} = 20 \log_{10} H_0 - 10 \log_{10} \left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right]$$

- $\omega \rightarrow 0, H_{dB} \rightarrow 0$
- $\omega \rightarrow \infty, H_{dB}$ varie comme $-40 \log(\omega/\omega_0) \Rightarrow$ Chute de 12 dB / Octave

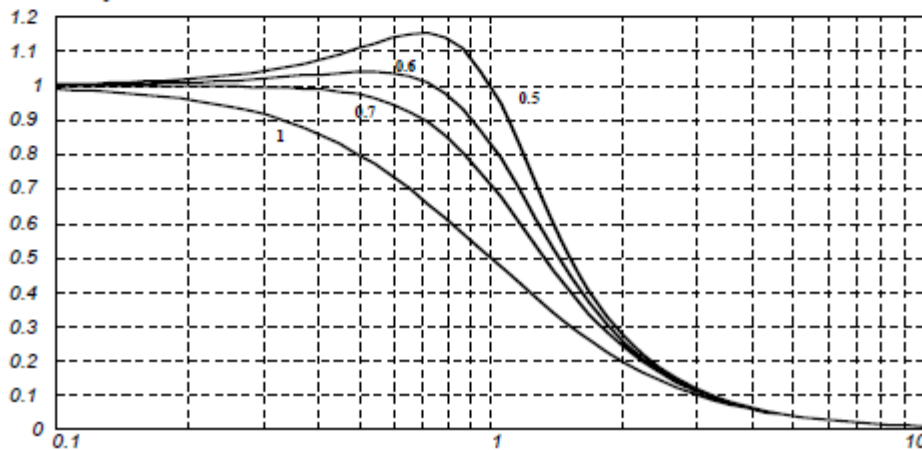


Asymptotes d'un filtre passe-bas du 2^{ème} ordre

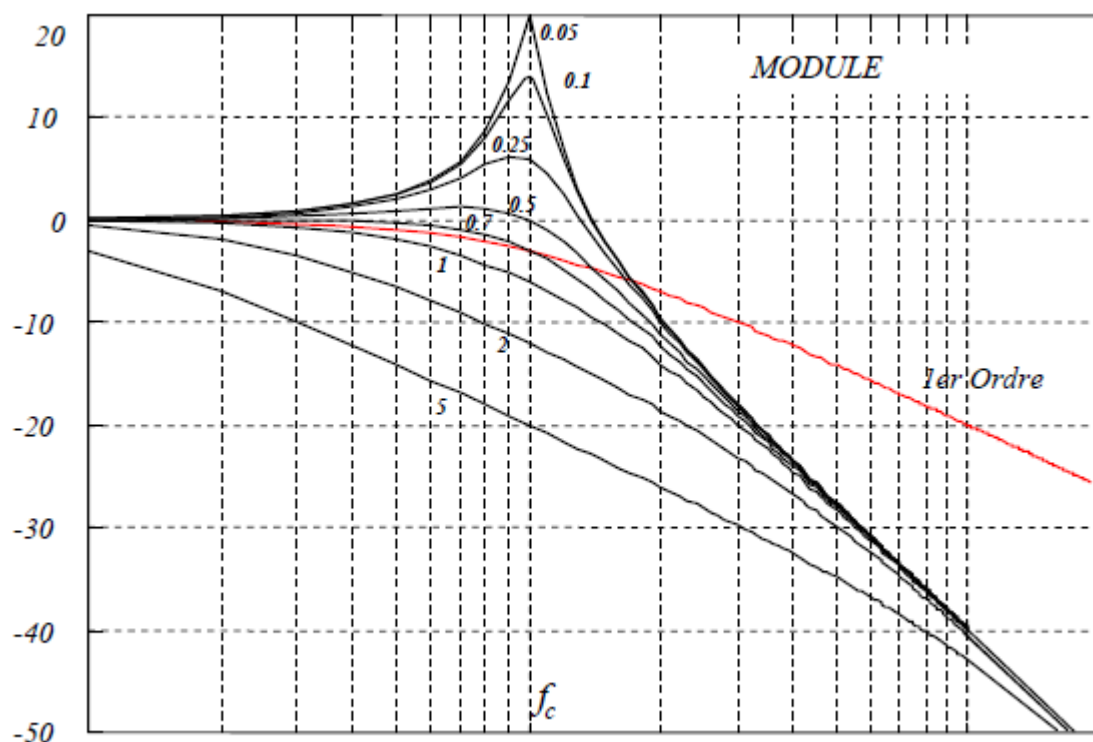
Phase :

$$\phi = \phi(N) - \phi(D) \quad \Phi(N) = \begin{cases} 0 & \text{si } h_0 > 0 \\ \pi & \text{si } h_0 < 0 \end{cases} \quad \Phi(D) = \begin{cases} \text{Arctg} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} & \text{si } \omega < \omega_0 \\ \text{Arctg} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} + \pi & \text{si } \omega > \omega_0 \end{cases}$$

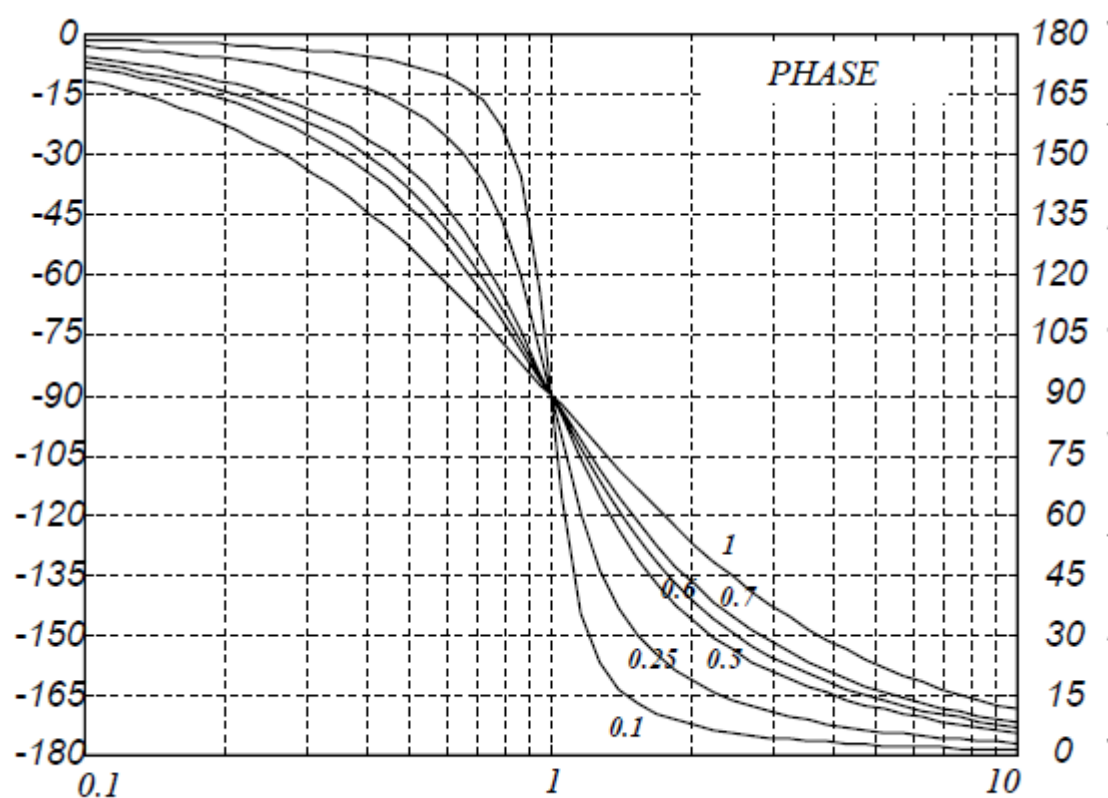
Les figures ci-dessous donnent l'allure de H , H_{dB} et de ϕ en fonction de f pour différentes valeurs de l'amortissement ζ



courbes du gain d'un filtre passe bas du 2^{ème} ordre (avec $H_0 = 1$)



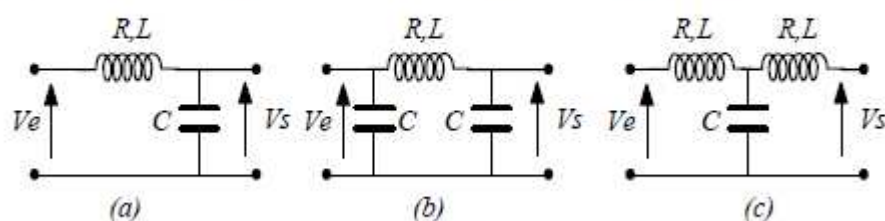
: courbes du gain d'un filtre passe bas du 2^{ème} ordre (avec $H_0 = 1$)



courbes de phase d'un filtre passe bas du 2^{ème} ordre

Réalisation à l'aide d'un filtre passif

Les filtres passifs du second ordre peuvent être réalisés de plusieurs façons.



Filtre passe bas du second ordre. (a): structure en L, (b): structure en π , (c): structure en T

Pour la structure en L, la fonction de transfert est :

$$H(\omega) = \frac{1/jC\omega}{1/jC\omega + R + jL\omega} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

Si on identifie avec l'expression générale : $H(\omega) = \frac{h_0}{1 + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_0} + (\frac{\omega}{\omega_0})^2}$

$$h_0 = 1, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Réalisation avec un filtre actif

Ces filtres peuvent être réalisés à l'aide de plusieurs structures à ampli-op, nous avons retenu la structure passe-bas de Salen-Key dont la fonction de transfert est :

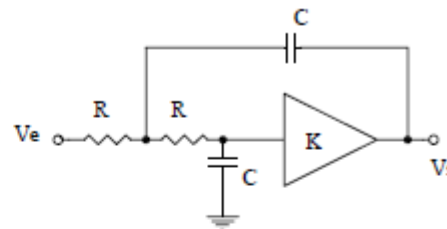
$$F(p) = \frac{k}{1 + (3-k)RCp + R^2C^2p^2}$$

k est le gain (positif) d'un amplificateur qu'on réalisera à l'aide d'un amplificateur non inverseur, on obtient le filtre représenté sur la figure ci-dessous

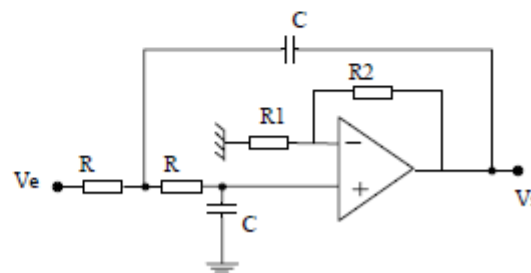
Si on identifie la fonction de transfert $h(p)$ du filtre avec la fonction de transfert $F(p)$ de la structure de Salen-Key on obtient :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}, \quad 3-k = 2\zeta \Rightarrow k = 3 - 2\zeta = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

En général, quand on veut réaliser un filtre, on connaît la fréquence de coupure ω_0 et le coefficient d'amortissement ζ . ω_0 permet de calculer la valeur de R après avoir fixé une valeur pour la capacité C. La valeur de ζ permet de calculer le gain k de l'amplificateur non inverseur, donc de R_2 et R_1 .



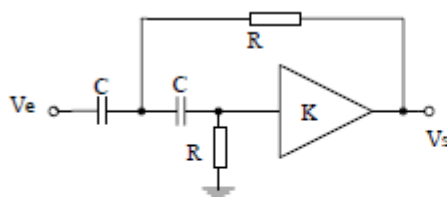
Structure passe bas de Salen-Key



filtre passe bas du second ordre

Les Filtres passe-haut du second ordre

Réalisation par filtre actif

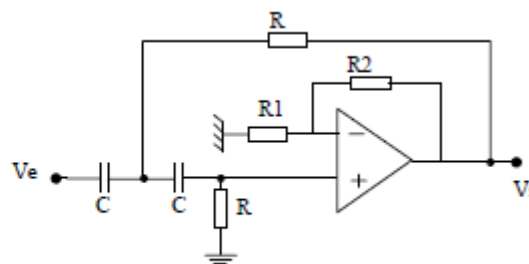


$$F(p) = \frac{kR^2C^2p^2}{1 + (3-k)RCp + R^2C^2p^2}$$

On obtient le filtre représenté sur la ci dessous. Les valeurs des composants sont déterminées en identifiant $h(p)$ avec $F(p)$ exactement de la même façon que pour le filtre passe bas. On obtient :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}, \quad 3-k = 2\zeta$$

$$k = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$



Filtre passe haut du second ordre

Les filtres passe-bande du second ordre

Ce sont les filtres ayant une fonction de transfert de la forme :

$$H(p) = \frac{h_o \left(\frac{p}{\omega_o} \right)}{1 + j \frac{\Delta \omega}{\omega_o} \frac{p}{\omega_o} + \left(\frac{p}{\omega_o} \right)^2}$$

$$H(\omega) = \frac{j h_o \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)}{1 + j \frac{\Delta \omega}{\omega_o} \frac{\omega}{\omega_o} + \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)^2}$$

- $\Delta f = f_2 - f_1$ = Bande passante à 3 dB ($\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi \Delta f$)
- $\frac{\Delta \omega}{\omega_o} = 2\zeta$
- $Q = \frac{\omega_o}{\Delta \omega}$
- Gain maximum = $H(\omega_o) = \frac{H_o}{2\zeta}$
- f_1, f_2 et f_o sont liées par les relations : $f_o = \sqrt{f_1 f_2}$ $Q = \frac{f_o}{f_2 - f_1}$

Module :

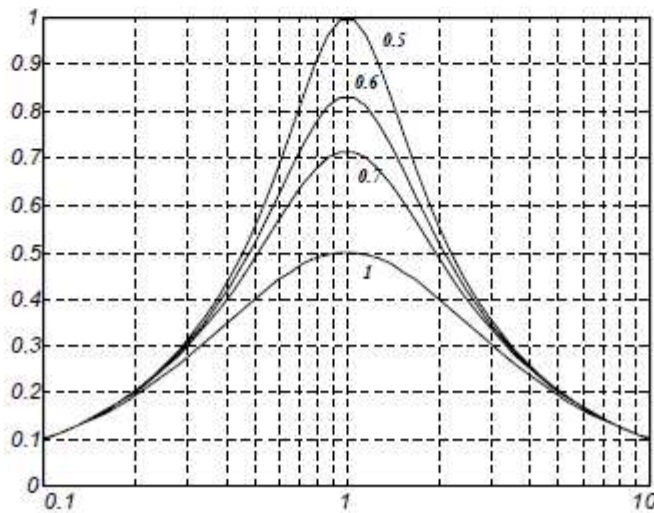
$$|H| = \frac{H_o \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{\Delta \omega}{\omega_o} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)^2}}$$

$$H_{dB} = 20 \log_{10}(H_o) + 20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right) - 10 \log_{10} \left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{\Delta \omega}{\omega_o} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)^2 \right]$$

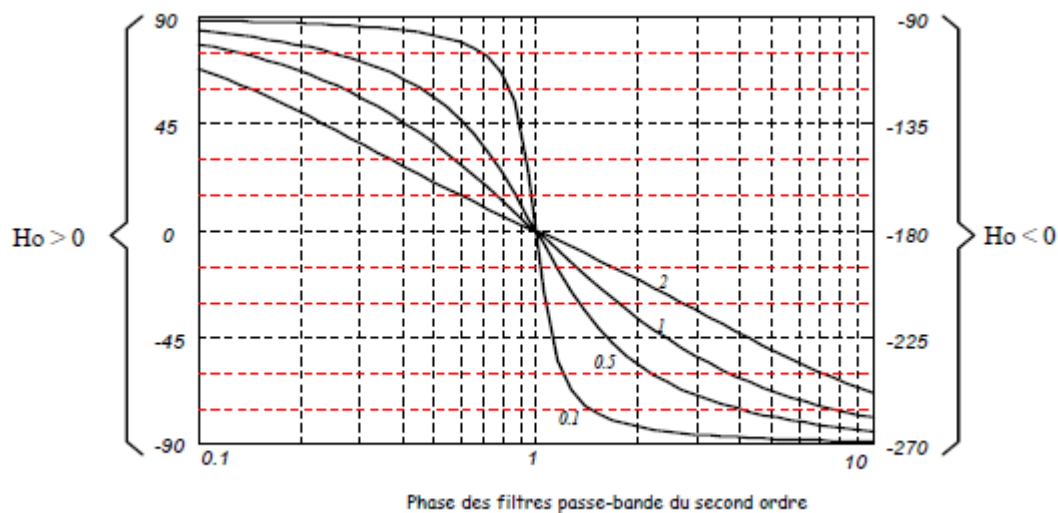
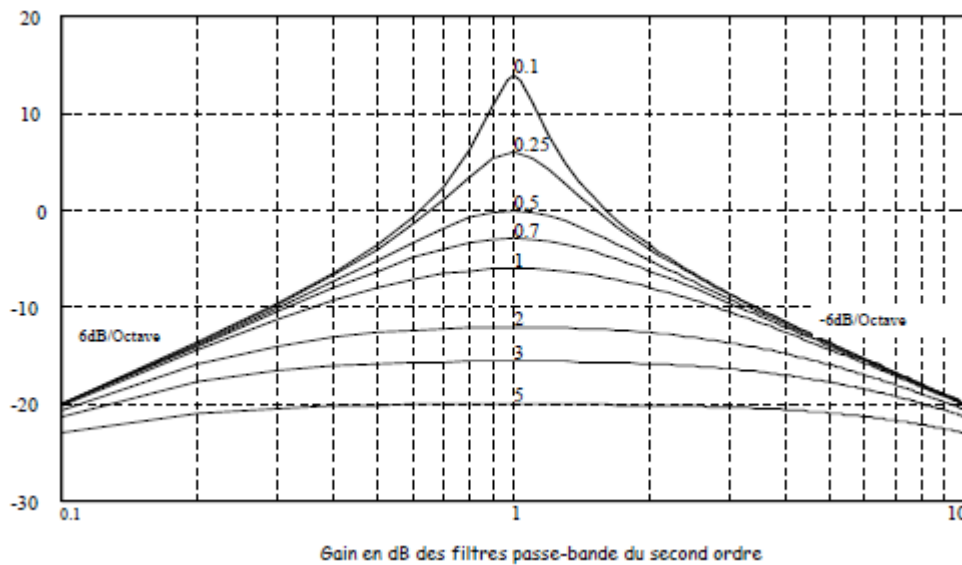
Phase :

$$\Phi = \Phi(N) - \Phi(D) \quad , \quad \Phi(N) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } h_o > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } h_o < 0 \end{cases} \quad \Phi(D) = \begin{cases} \text{Arctg} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_o}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)^2} & \text{si } \omega < \omega_o \\ \text{Arctg} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_o}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)^2} + \pi & \text{si } \omega > \omega_o \end{cases}$$

Les caractéristiques de transfert (paramétrées par ζ) sont représentées ci-dessous.



Gain des filtres passe-bande du second ordre



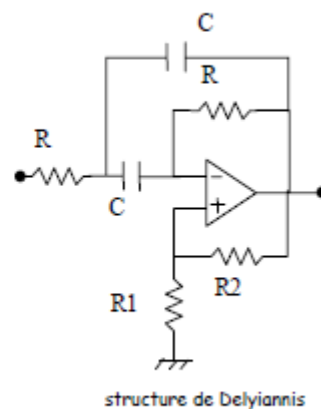
Réalisation par filtre actif

Ces filtres peuvent être réalisés à l'aide de plusieurs structures à ampli-op différentes, nous avons retenu la structure de Delyiannis dont la fonction de transfert est :

$$F(p) = \frac{-\frac{kRC}{k-1}p}{1 + \left(2 - \frac{1}{k-1}\right)RCp + R^2C^2p^2} \quad \text{avec} \quad k = 1 + \frac{R}{R_1}$$

Les valeurs des composants sont déterminés en identifiant $h(p)$ avec $F(p)$. On trouve :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$



2.5 Les filtres polynômiaux

Les filtres réels sont définis par une fonction de transfert appropriée déduite de la réponse fréquentielle $|H(f)|$

Sachant que :

$$|H(j\omega)|^2 = H(p) \cdot H(-p) \quad |_{p=j\omega}$$

tel que $H(p)$: fonction de transfert du filtre, elle doit être choisie d'une manière que le filtre soit stable.

La forme générale du carré de la réponse fréquentielle est de la forme :

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{k \cdot (C_k \omega^{2k} + C_{k-1} \omega^{2k-2} + \dots + C_0)}{(d_k \omega^{2k} + d_{k-1} \omega^{2k-2} + \dots + d_0)}$$

Le calcul de $H(p)$, devient à trouver le $H(p)$ pour lequel les pôles sont à partie réelle négative.

Filtre passe-bas de référence :

qu'importe quel filtre il peut être approximé par un filtre passe-bas de référence qui a une forme générale de son carré de la réponse fréquentielle comme suit :

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{d_0}{d_0 + d_1 \omega^2 + d_2 \omega^4 + \dots + d_k \omega^{2k}}$$

* le gain du filtre est unitaire en bande passante

* pour les fréquence haute on aura $|H(j\omega)|^2 = \frac{d_0/d_k}{\omega^{2k}}$

donc la nature ou le niveau du filtre en bande atténuée dépend beaucoup sur d_0 et d_k .

Exemple : Trouver les fonction de transfert définie par :

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{25(4 - \omega^2)^2}{(9 + \omega^2)(16 + \omega^2)} \quad \omega = 2\pi f$$

$$p = j\omega \Rightarrow \omega^2 = -p^2$$

Solutions : $H(p) \cdot H(-p) = \frac{25(4 + p^2)^2}{(9 - p^2)(16 - p^2)}$, on remplace $\omega^2 = -p^2$

Les pôles sont $p \begin{cases} +3 \\ -3 \\ +4 \\ -4 \end{cases}$

alors la fonction de transfert résultante est :

$$H(p) = \frac{5 \cdot (4 + p^2)}{(p+3)(p+4)} = \frac{5p^2 + 20}{p^2 + 7p + 12}$$

Remarque, suivant les caractéristiques recherchées du filtre
Il existe plusieurs type d'approximation et on peut citer:

2.5.1 Filtres de Butterworth (maximally flat): (platitude maximale)

Ils sont connus pour avoir une réponse fréquentielle plate au maximum dans la bande passante

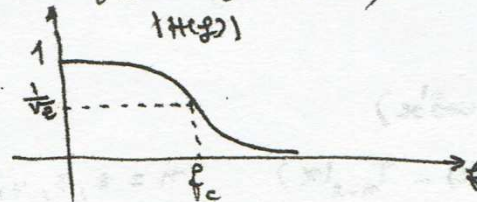
Le modèle du filtre passe bas est donné par:

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2k}}$$

Avec:

k : ordre du filtre

ω_c : pulsation de coupure = $2\pi f_c$, f_c : fréquence de coupure



Exemple: Donner la fonction de transfert $H(p)$ d'un filtre passe Bas de Butterworth d'ordre 3 pour $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$.

Solution:

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2k}}$$

$$k = 3 \text{ et } \omega_c = 1 \Rightarrow |H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^6}, \quad \omega = -p^2$$

$$\Rightarrow H(p) \cdot H(-p) = \frac{1}{1 - p^6}$$

$$1 - p^6 = (1 - p^3) \cdot (1 + p^3) \Rightarrow \text{les poles sont:}$$

$$p_1 = 1, \quad p_2 = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad p_3 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

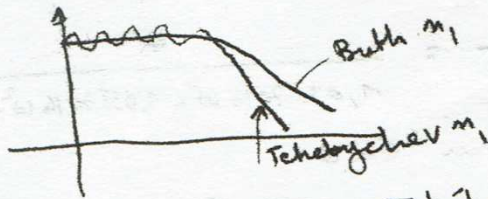
$$p_4 = -1, \quad p_5 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad p_6 = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

on doit choisir les poles a partie réelle négative (p_3, p_4, p_5)

$$\Rightarrow H(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}, \quad \text{la fonction de transfert du filtre de Butterworth d'ordre 3.}$$

2.5.2 Filtres de Tchebychev:

La réponse d'amplitude est à coupure plus raide au voisinage de f_c que pour le filtre de Butterworth pour un ordre donné en plus de l'ondulation en bande passante



Un filtre passe-bas de Tchebychev d'ordre n et caractérisé par le carré de la réponse d'amplitude suivant :

$$|H_c(\omega)|^2 = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

où T_n : polynôme de Tchebychev d'ordre n

ε : paramètre qui définit l'ondulation en bande passante

α : paramètre qui // le gain en signal continu.

si on pose $x = \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$

$$\Rightarrow T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x)$$

$$T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

$$-1 < T_n(x) < 1$$

* L'ondulation en dB dans la bande passante est donnée par

$$r = 20 \log_{10} \frac{A_{\max}}{A_{\min}} \quad \text{avec :}$$

$A_{\max}$ = est la valeur max de la réponse en bande passante

$A_{\min}$ = // // // min // // // // //

$$A_{\max}^2 = \alpha, \quad A_{\min}^2 = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon^2} \quad \text{on tire alors}$$

$$r = 10 \log_{10} (1 + \varepsilon^2) \Rightarrow \varepsilon^2 = 10^{(r/10)} - 1.$$

Exemple : Donner la fonction de transfert de Tchebychev du second ordre avec une ondulation de 1 dB en bande passante et une fréquence de coupure $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$. Sachant que le gain continu est unitaire :

Solution

$$\varepsilon^2 = 10^{(1/10)} - 1 = 10^{0.1} - 1 = 0,25892541$$

$$\Rightarrow T_2(x) = 2x T_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1.$$

Le carré de la réponse en amplitude est donnée par :

$$|H(f)|^2 = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon^2 \cdot T_n^2(x)}, \quad x = \frac{\omega}{\omega_c} = \omega \text{ car } \omega_c = 1, \quad n=2$$

$$\Rightarrow |H(f)|^2 = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon^2 \cdot (2\omega^2 - 1)^2} = \frac{\alpha}{1,0357016\omega^4 - 1,0357016\omega^2 + 1,2589254}$$

gain unitaire pour un signal continu c.à.d.

$$\omega=0 \Rightarrow |H(0)|^2 = 1 \Rightarrow \alpha = 1,2589254$$

on remplace $\omega^2 = -p^2$ et on tire $H(p)$ pour lequel les poles sont à partie réelle négative :

$$\Rightarrow H(p) = \frac{1,1025103}{p^2 + 1,0977343p + 1,1025103}$$

Transformation de fréquences:

Transformation P.bas - Passe-bas:

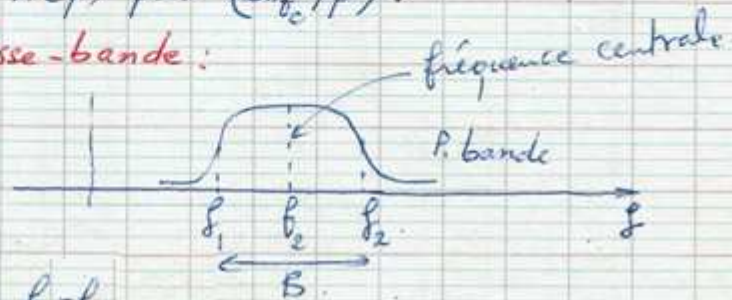
- pour calculer $H(p)$ d'un filtre P.bas de fréquence de coupure f_c , il faut :
- calculer $H(p)$ du filtre P.bas normalisé ($\omega_c = 1 \text{ rad/s}$)
 - on remplace p dans $H(p)$ par $(p/2\pi f_c)$.

Transformation - Passe-bas - Passe-Haut:

Pour calculer $H(p)$ d'un filtre Passe-Haut de fréquence de coupure f_c , il faut :

- Calculer $H(p)$ du filtre P.bas normalisé ($\omega_c = 1 \text{ rad/s}$).
- on remplace p dans $H(p)$ par $(2\pi f_c/p)$.

Transformation P.bas - Passe-bande:



$$f_2 = \sqrt{f_1 f_3}$$

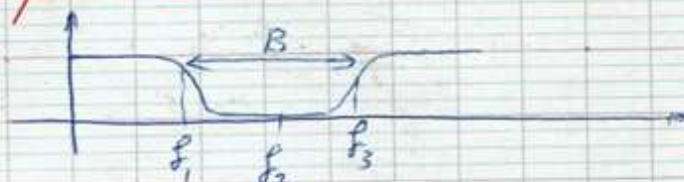
$$B = f_3 - f_1$$

La procédure de transformation est la suivante

- Déterminer la fonction de T du filtre P.bas normalisé ($\omega_c = 1 \text{ rad/s}$)
- obtenir la FT du filtre P.bande en remplaçant P dans $H(p)$ par $\frac{p^2 + \omega_c^2}{2\pi B p}$ avec $\omega_c = 2\pi f_c$

Remarque: l'ordre du filtre P.bande résultant est le double du filtre passe-bas.

Transformation P.bas $\rightarrow$ coupe-bande:



$$f_2 = \sqrt{f_1 f_3}, \quad B = f_3 - f_1$$

La procédure de transformation est similaire à celle du passe-bande sauf à la fin on doit remplacer P dans $H(p)$ par: $\frac{2\pi B \cdot p}{p^2 + \omega_c^2}$