

Chapitre1 Rappels des principaux résultats de la théorie du signal

1.1 Définitions

1.1.1 Définition d'un signal

On appelle un signal toute grandeur physique variable en fonction du temps et véhiculant une information.

- Dans la pratique un signal est généralement délivré par un capteur mesurant une grandeur physique (son, parole, température, pression...) sous forme d'un courant ou d'une tension électrique.

- Mathématiquement un signal est défini par une fonction du temps : $s(t)$

Où t : est une variable réelle représentant le temps et $s(t)$: est un nombre réel et parfois complexe.

Exemples de signaux :

- Ondes électromagnétiques captées par les récepteurs radio et télévisions

- onde lumineuse dans une fibre optique

- La tension électrique dans un fil téléphonique

- Onde acoustique

- Signaux physiologiques : ECG, EEG, EMG ...

- Variation de la température d'une pièce

- Signaux géophysiques : vibrations sismiques

- Intensité d'un courant électrique

1.1.2 Théorie du signal

La théorie des signaux est l'ensemble des outils mathématiques qui permet de décrire les signaux émis par une source ou modifiés par un système de traitement.

1.1.3 Le traitement du signal

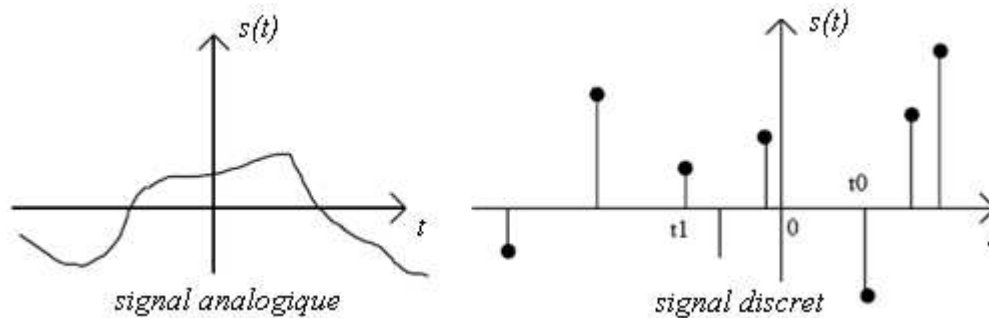
Est l'ensemble des opérations qui visent à modéliser, analyser, extraire, exploiter, transformer, restaurer, compresser, transmettre l'information contenue dans des signaux (amplification, modulation, démodulation, échantillonnage, conversion analogique-numérique (CAN) et Numérique-analogique (CNA)...). Toutes ces opérations doivent être effectuées sans que l'information soit dégradée ou à défaut que la dégradation soit la plus faible possible.

1.2 Classification des signaux

Il existe différents modes de classification :

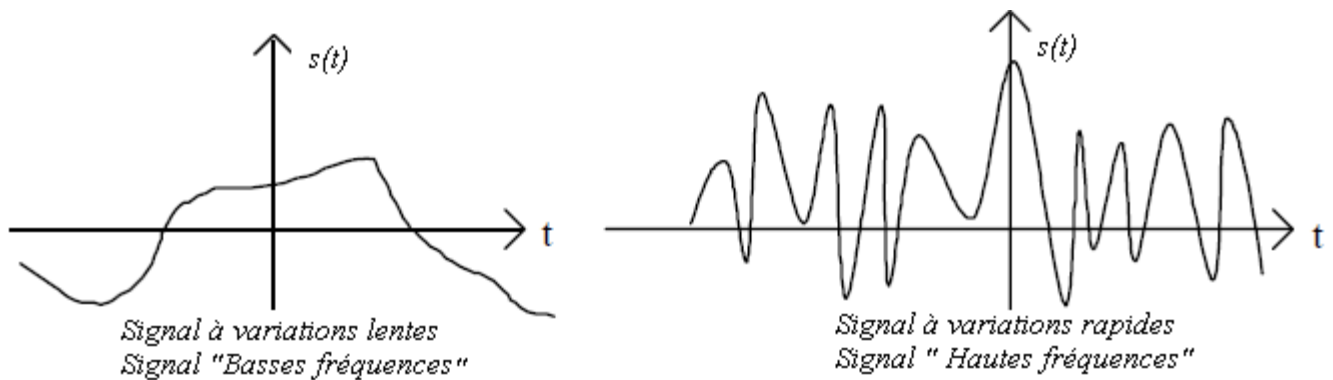
a) Classification morphologique :

On distingue ici les signaux qui prennent des valeurs à chaque instant t (signaux continus ou analogiques) et les signaux qui n'ont de valeurs qu'à certains instants t_i (signaux discrets).



b) Classification spectrale :

On classe les signaux suivant la bande de fréquence qu'ils occupent.



Un signal peut être classé selon la distribution de son énergie ou de sa puissance en fonction de la fréquence (spectre du signal). Le domaine de fréquence occupé par son spectre est aussi appelé la largeur de bande du signal.

$$\Delta F = F_{\max} - F_{\min}$$

Généralement on compare aussi la largeur de la bande spectrale du signal au domaine de fréquences dans lequel se situe cette bande. En considérant la fréquence moyenne.

$$F_{\text{moy}} = (F_{\max} + F_{\min})/2$$

- Pour $\Delta F/F_{\text{moy}}$ est petit ($F_{\max} \approx F_{\min}$), les signaux sont alors à bande étroite.
- Pour $\Delta F/F_{\text{moy}}$ est grand ($F_{\max} \gg F_{\min}$), les signaux sont alors à large bande.

Pour les signaux à bande étroite, il est possible de les classer par le domaine de variation de la fréquence moyenne F_{moy} en deux catégories:

- ✓ Signaux à basses fréquences (BF) : $F_{\text{moy}} < 300 \text{ kHz}$,
- ✓ Signaux hautes fréquences (HF) : $F_{\text{moy}} > 300 \text{ kHz}$.

c) Classification énergétique

Les signaux peuvent être à énergie finie ou à puissance moyenne finie

- **Les signaux à énergie finie**

Ces signaux vérifient la condition :

$$E_S = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt < +\infty$$

Ils sont dits aussi signaux de carré intégrable ou à carré sommables. Tous les signaux transitoires ou à support borné que ce soient déterministe ou aléatoires sont à énergie finie.

- **Les signaux à puissance moyenne finie non nulle**

Ce sont les signaux qui satisfont à la condition :

$$0 < P_S = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt \right] < \infty$$

Tous les signaux périodiques sont de cette classe. Pour un signal périodique de période T_0 , la puissance moyenne totale se calcule sur une période.

Remarque :

- ✓ Un signal à énergie finie possède une puissance moyenne nulle ($P_S = 0$),
- ✓ Un signal à puissance moyenne finie non nulle, possède une énergie infinie ($E_S = \infty$).

d) Classification phénoménologique (typologique)

Cette classification est basée sur l'évolution du signal en fonction du temps, elle fait apparaître deux types fondamentaux.

- **Signaux Déterministes ou Certains**

Leur évolution en fonction du temps peut être parfaitement décrite et prédite par un modèle mathématique approprié (formule mathématique). On distingue deux sous classes :

- ✓ Les signaux périodiques

Un signal $s(t)$, périodique de période T_0 satisfait la relation

$$s(t) = s(t + kT_0)$$

Où k est un entier.

Un cas particulier des signaux périodiques, sont les signaux sinusoïdaux.

✓ Les signaux non périodiques.

- **Signaux Aléatoires ou incertains** (dites aussi probabilistes ou stochastiques)

Ces types de signaux ont un comportement temporel imprévisible et leur description se fait à base d'observations statistiques (densité de probabilité, moyenne, variance,...).

Exemple : Signaux physiologiques, le bruit affectant un signal, le signal de la parole.

e) Autres classifications

- **Signaux causaux**

Un signal $s(t)$ est dit causal si $s(t) = 0$ pour $t < 0$

Expérimentalement, tous les signaux sont causaux, et c'est par commodité théorique que l'on définit les signaux sur tout l'axe des temps.

- **Signaux pairs et signaux impairs**

✓ Un signal $s(t)$ est dit pair si $s(-t) = s(t)$, Ex : signal $rect(t)$, $tri(t)$, $\cos(t)$

✓ Un signal $s(t)$ est dit impair si $s(-t) = -s(t)$, Ex : signal $s(t) = \sin(t)$

✓ Un signal peut être ni pair ni impair : $s(t) = e^t$.

✓ Tout signal réel $s(t)$ peut être décomposé en une partie paire $s_p(t)$ et une partie impaire $s_i(t)$.

$$s(t) = s_p(t) + s_i(t)$$

Avec
$$s_p(t) = \frac{s(t) + s(-t)}{2} \quad \text{et} \quad s_i(t) = \frac{s(t) - s(-t)}{2}$$

Remarque :

Les signaux physiques ont les caractéristiques suivantes :

- Causals,
- Temps continu,
- Amplitude bornée,
- Énergie bornée,
- Spectre borné (tend vers 0 lorsque la fréquence tend vers l'infini).

Mais sur le plan théorique, pour la commodité du calcul et l'étude de certains phénomènes, les signaux sont généralement représentés par des fonctions :

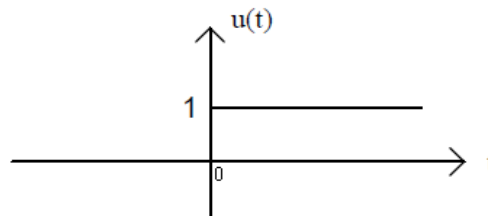
- Définies sur l'ensemble des réels (signaux non causals),
- A valeurs complexes,
- Avec des discontinuités (signal rectangulaire par ex.),
- A énergie théorique infinie,
- A spectre infini.

1.3 Signaux élémentaires

Les signaux élémentaires sont des signaux très utilisés en théorie et traitement du signal

1.3.1 Echelon unité (t)

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{pour } t \geq 0 \\ 0, & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$



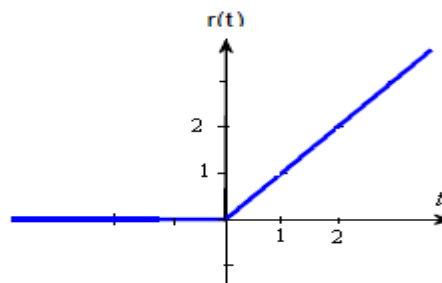
Exemple : une tension $v(t)$ continue de 10 Volts appliquée à un circuit électrique à l'instant $t=0$ s'écrit :

$$v(t) = 5 \cdot u(t)$$

1.3.2 Rampe unité

$$r(t) = \begin{cases} t, & \text{pour } t \geq 0 \\ 0, & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

$$r(at) = a \cdot r(t)$$

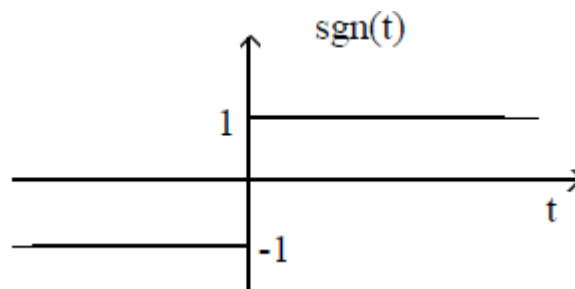


$r(t)$ exprime la vitesse de variation de la grandeur considérée.

Exemple : $r(t) = 0,5 \cdot t$ peut exprimer la croissance linéaire de la température d'un four.

1.3.3 Fonction signe $sgn(t)$

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} +1, & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t = 0 \\ -1, & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$



On peut également définir $\text{sgn}(t)$ par :

$$\text{sgn}(t) = \frac{t}{|t|} \quad \text{pour } t \neq 0$$

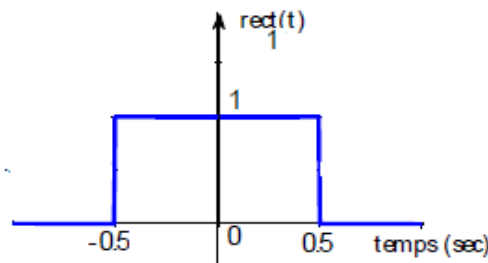
$$\text{sgn}(at) = \text{sgn}(t) \quad \forall a > 0$$

1.3.4 Signal porte ou impulsion rectangulaire

$$P_{T_0}(t) = \text{rect}_{T_0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -T_0/2 \leq t \leq T_0/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$P_{T_0}(t) = \text{rect}_{T_0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |t| \leq T_0/2 \\ 0 & \text{pour } |t| > T_0/2 \end{cases}$$

Exemple : $s(t) = \text{rect}_1(t)$

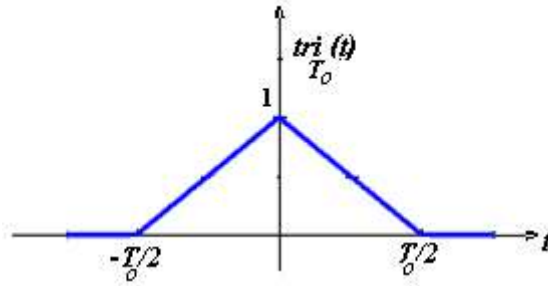


1.3.5 Signal impulsion triangulaire

Un signal triangulaire de durée T_0 est donné par l'expression suivante :

$$\text{tri}_{T_0}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2 \cdot |t|}{T_0} & \text{pour } \frac{-T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La représentation graphique de l'impulsion triangulaire est donnée par la figure suivante :



1.3.6 Signal sinus cardinal

Il est donnée par:

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$$

Sa valeur à l'origine est égale 1

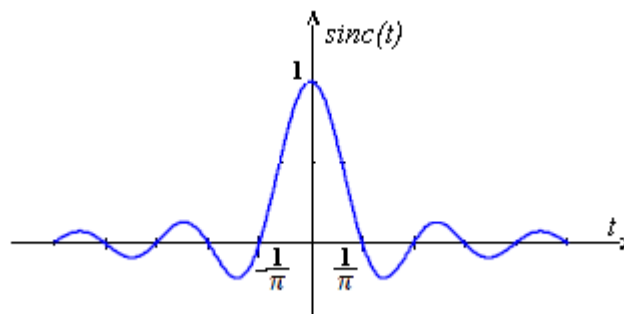
Il s'annule aux valeurs de $t = n.\pi$ (où n est un nombre entier et différent zéro).

Ce signal vérifie les relations suivantes :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(t) dt = 1$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(t) dt = 1$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} a. \text{sinc}(at) dt = 1 \quad \text{avec } a \text{ constante non nulle.}$$



1.3.7 Signal sinusoïdale

La forme générale d'un signal sinusoïdal est donné par :

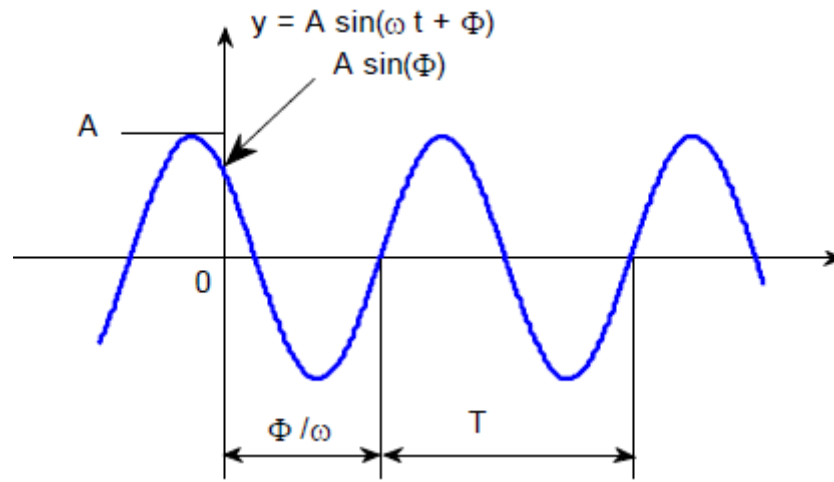
$$y = A \sin(\omega t + \phi) = A \sin(\omega(t + \phi/\omega)) = A \sin(\omega(t + \tau))$$

avec $(0 \leq |\phi| \leq 2\pi)$ et $(A \in \mathbb{R})$

A : l'amplitude du signal,

ϕ : la phase du signal à l'origine (en rad),

τ : décalage temporel (en sec) entraîné par la phase ϕ .

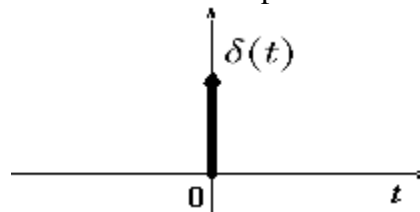


1.3.8 Fonction Impulsion de Dirac

Elle est définie par la relation suivante :

$$\delta(t) = \begin{cases} -\infty & \text{pour } t = 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Elle est représentée graphiquement par une flèche verticale placée à l'origine.



Elle peut être approximée par une fonction porte d'amplitude $\frac{1}{\tau}$ et de largeur τ ($\tau \rightarrow 0$). C'est-à-dire :

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \cdot \text{rect}_{\tau}(t)$$

- **Propriétés de l'impulsion de Dirac**

- ✓ $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$
- ✓ $\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \delta(t) dt = s(0)$
- ✓ $\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \delta(t - t_0) dt = s(t_0)$
- ✓ $a \cdot \delta(t - t_1) \cdot b \cdot \delta(t - t_2) = 0$ si $t_1 \neq t_2$
- ✓ $a \cdot \delta(t - t_1) \cdot b \cdot \delta(t - t_2) = a \cdot b \cdot \delta(t - t_1) \cdot 0$ si $t_1 = t_2$
- ✓ $\delta(-t) = \delta(t)$ c'est un signal pair.
- ✓ $s(t) \cdot \delta(t) \equiv s(0) \cdot \delta(t)$
- ✓ $s(t) \cdot \delta(t - t_0) = s(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$

Remarque

Il y a une différence entre $s(t) = x(0)$ et $s(t) = x(0) \cdot \delta(t)$.

$$✓ \quad \delta(at) = \frac{\delta(t)}{|a|}$$

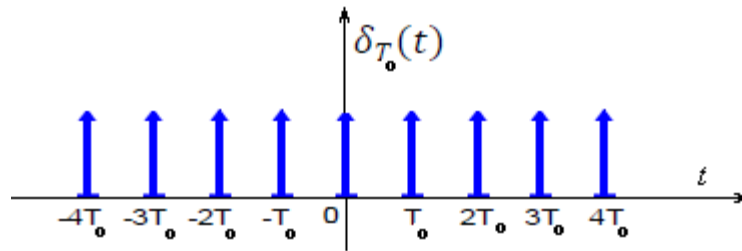
$$✓ \quad \delta(\omega t) = \delta(2\pi f t) = \frac{\delta(t)}{2\pi f}$$

1.3.9 Peigne de Dirac $\delta_{T_0}(t)$

Le signal peigne de Dirac $\delta_{T_0}(t)$ est une suite infinie d'impulsions de Dirac régulièrement espacées de T_0 . Il est défini par :

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$

C'est la somme des impulsions de Dirac décalées aux instants kT_0 .



1.3.10 Quelques relations entre signaux

- ✓ Relation entre la rampe $r(t)$ et l'échelon $u(t)$:

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = t \cdot u(t)$$

- ✓ Relation entre l'échelon $u(t)$ et l'impulsion de Dirac $\delta(t)$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

La dérivée au sens de distribution de $u(t)$ nous donne $\delta(t)$.

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$u(t) = \frac{dr(t)}{dt} \quad \text{pour } t \neq 0$$

- ✓ Relation entre $\text{sgn}(t)$ et $u(t)$

$$\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1 \quad \text{pour } t \neq 0$$

$$\text{sgn}(t) = u(t) - u(-t) \quad \forall t$$

- ✓ Relation entre $\text{rect}(t)$ et $u(t)$

$$\text{rect}_{T_0}(t) = u\left(t + \frac{T_0}{2}\right) - u\left(t - \frac{T_0}{2}\right)$$

1.4 Série de Fourier

1.4.1 Série de Fourier trigonométrique réelle

Tous signal périodique $s(t)$, de période T_0 , il peut être développé en une somme de fonctions sinusoïdales de fréquences f multiple de la fréquence du signal $f_0 = \frac{1}{T_0}$. Cette série est donnée par la relation suivante :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos\left(\frac{2\pi n t}{T_0}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{2\pi n t}{T_0}\right) \right]$$
$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \cdot \sin(2\pi n f_0 t)]$$

Où a_n et b_n sont les coefficients de la série de Fourier trigonométrique réelle, ils se calculent à partir des relations suivantes :

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cdot dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cdot dt \quad \text{et } b_0 = 0, \forall s(t)$$

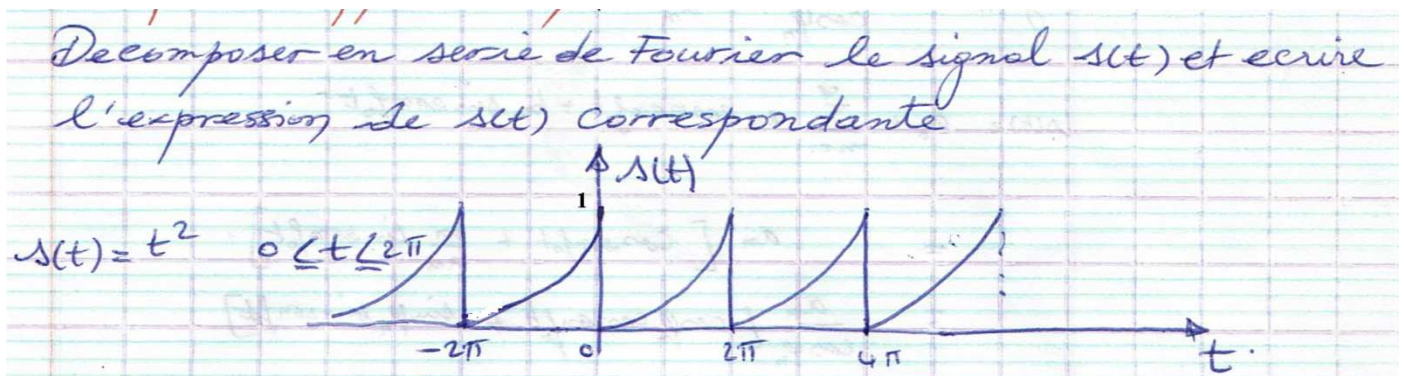
$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cdot \cos(2\pi n f_0 t) \cdot dt = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cdot \cos(2\pi n f_0 t) \cdot dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cdot \sin(2\pi n f_0 t) \cdot dt = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cdot \sin(2\pi n f_0 t) \cdot dt$$

Où $f_0 = \frac{1}{T_0}$, est la fréquence fondamentale et $n f_0$ les fréquences des harmoniques.

a_0 : La valeur moyenne ou la composante continue du signal.

Exemple d'application



Solution

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} s(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{4}{3} \pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} s(t) \cos 2\pi n f_0 t dt = \frac{4}{n^2} ; n \neq 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} s(t) \sin 2\pi n f_0 t dt = -\frac{4\pi}{n} ; n \neq 0$$

} intégration par partie

$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}$

et la série de Fourier Correspondante sera :

$$s(t) = \frac{4}{3} \pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos 2\pi n f_0 t - \frac{4\pi}{n} \sin 2\pi n f_0 t \right).$$

$$s(t) = \frac{4}{3} \pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos nt - \frac{4\pi}{n} \sin nt \right).$$

$$s(t) = \frac{4}{3} \pi^2 + 4 \cos t - 4\pi \sin t + \cos 2t - 2\pi \sin 2t + \dots$$

1.4.2 Série de Fourier Alternative réelle

Elle se déduit de la série trigonométrique réelle. Elle est donnée par la relation suivante :

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(2\pi n f_0 t - \varphi_n)$$

Où

$$A_0 = a_0, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{et} \quad \varphi_n = \arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Remarque : les coefficient A_n sont appelés les amplitudes spectrales ; c.à.d. : A_n est l'amplitude de la composante spectrale : $A_n \cdot \cos(2\pi n f_0 t - \varphi_n)$ à la fréquence $n f_0$.

1.4.3 Série de Fourier complexe

Elle est donnée par la relation suivante :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{j2\pi n f_0 t}$$

Avec

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} \cdot dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} \cdot dt$$

Où $C_0 = a_0$, $a_n = 2 \times \text{Re}\{C_n\}$, $b_n = -2 \times \text{Im}\{C_n\}$ et $C_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$

Exemples :

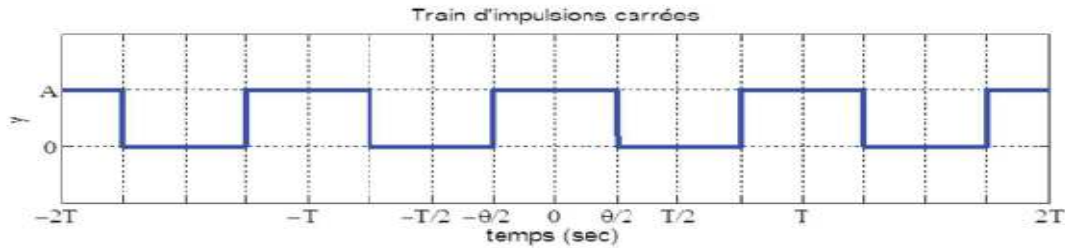
1) Soit C_n une suite définie par: $C_1 = C_{-1} = \frac{A}{2}$ et $C_n = 0$, si $n \neq (1, -1)$.

Déterminer $s(t)$?

Solution

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{+2\pi j \frac{nt}{T}} = \frac{A}{2} (e^{2\pi j \frac{t}{T}} + e^{-2\pi j \frac{t}{T}}) = A \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

Calculer les coefficients réel et complexe de développement en série de Fourier du signal $s_1(t)$ de la figure suivante :



$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s_1(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_1(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} A dt = \frac{A\theta}{T}$$

$$a_n = \frac{2A}{T} \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = \frac{2A}{T} \left[\frac{T}{2\pi n} \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right]_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} = \frac{2A}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi\theta}{T}\right)$$

$$a_n = \frac{2A\theta}{T} \frac{\sin\left(\frac{\pi n\theta}{T}\right)}{\frac{\pi n\theta}{T}} = \frac{2A\theta}{T} \text{sinc}\left(\frac{n\theta}{T}\right)$$

$$b_n = \frac{2A}{T} \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = \frac{2A}{T} \left[-\frac{T}{2\pi n} \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right]_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}}$$

$$b_n = \frac{A}{\pi n} \left[-\cos\left(\frac{\pi n\theta}{T}\right) + \cos\left(-\frac{\pi n\theta}{T}\right) \right] = 0$$

Tapez une équation ici.

$$c_n = \frac{A}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{A}{T} \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

$$c_n = -\frac{A}{j2\pi n} \left[e^{-j2\pi n f_0 t} \right]_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}}$$

$$c_n = -\frac{A}{j2\pi n} \left[e^{-j\pi n f_0 \theta} - e^{j\pi n f_0 \theta} \right]$$

Tapez une équation ici.

$$C_n = \frac{A\theta}{T} \text{sinc}(\pi n f_0 \theta)$$

Donc le signal $s_1(t)$ s'écrit :

$$s_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A\theta}{T} \text{sinc}(\pi n f_0 \theta) \cdot e^{j2\pi n f_0 t}$$

1.4.4 Représentation spectrale

Les coefficients C_n sont les composants du spectre en fréquences $S(f)$ du signal (t) , tel que :

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(f - nf_0)$$

Le spectre $S(f)$ est dit bilatérale parce qu'il utilise les fréquences positives et négatives
 $S(f)$ est en général complexe, il peut être écrit :

$$S(f) = |S(f)|e^{j\varphi(f)}$$

Avec :

$|S(f)| = |C_n|$: le module du spectre appelé spectre d'amplitude.

$\varphi(f) = [C_n]$: l'argument de C_n (la phase du spectre) appelé spectre de phase.

✓ **Spectre d'amplitude :**

$$|S(f)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n| \cdot \delta(f - nf_0)$$

✓ **Spectre de phase :**

$$\varphi(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \theta_n \delta(f - nf_0), \quad \text{avec} \quad \theta_n = \text{Arg}[C_n] = \arctg\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

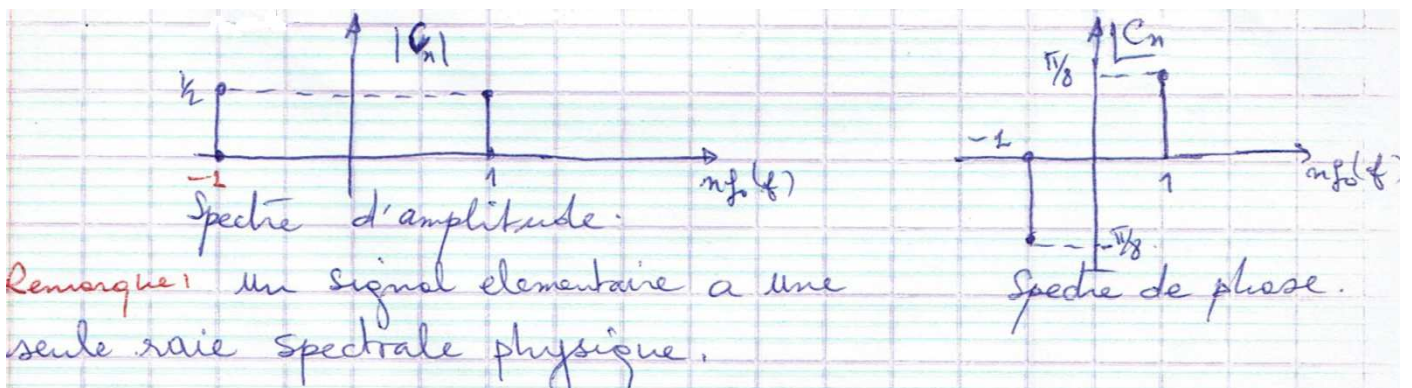
$$-\pi \leq \theta_n \leq \pi \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Exemple 1

représenter le spectre de phase et le spectre d'amplitude du signal
 $s(t) = \cos(2\pi t + \pi/4)$.

Solution

* le signal $s(t)$ est périodique de période $T_0 = 1s$, alors il est décomposable en série de Fourier, et il peut être écrit comme
 $s(t) = \cos(2\pi t + \pi/4) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t}$ où $f_0 = \frac{1}{T_0} = 1Hz$.
 $s(t) = \underbrace{\frac{1}{2} e^{j\pi/4}}_{n=1} \cdot e^{j2\pi t} + \underbrace{\frac{1}{2} e^{-j\pi/4}}_{n=-1} \cdot e^{-j2\pi t}$



Exemple 2

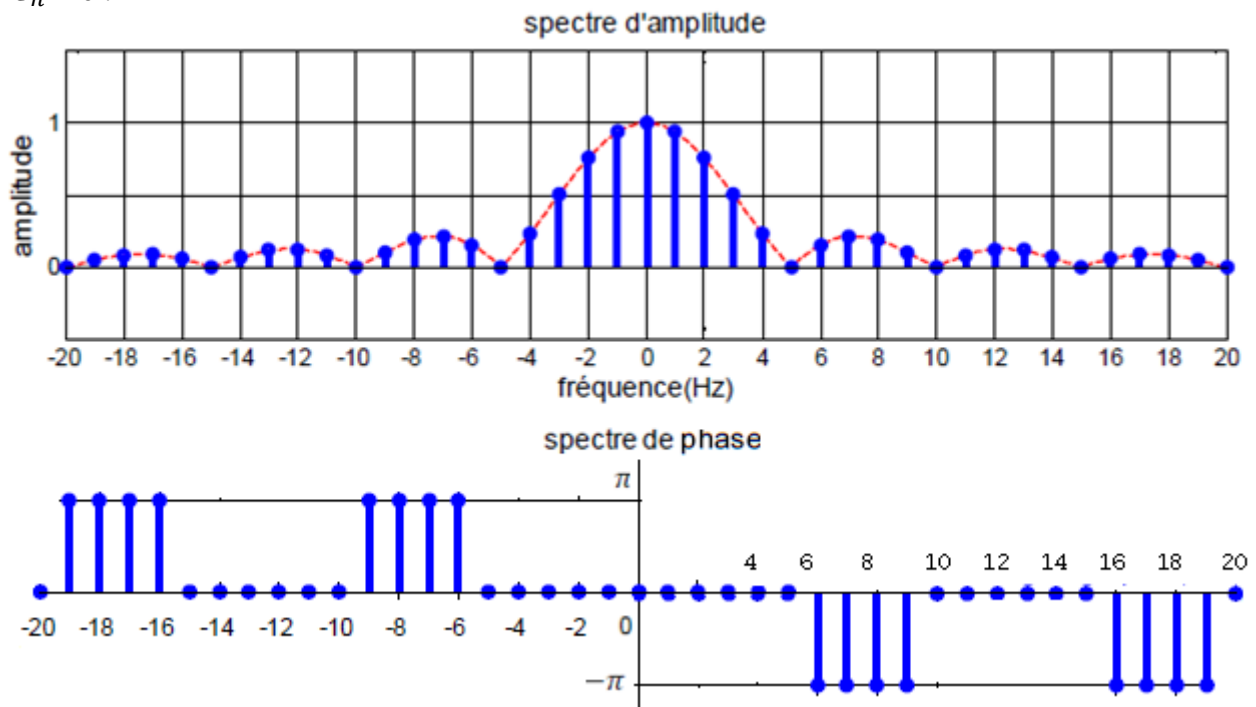
Si on prend le signal train d'impulsions rectangulaires $s_1(t)$ de l'exemple précédent, $C_n = \frac{A\theta}{T} \text{sinc}(\pi n f_0 \theta)$.

avec $\theta = 5\theta$. On a aussi $f_0 = \frac{1}{T}$, Alors :

Le spectre d'amplitude sera :

$$|C_n| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A}{5} \text{sinc}\left(\frac{\pi n}{5}\right) \delta(f - n f_0)$$

Les coefficients C_n sont réel, donc le spectre de phase est nul pour $C_n \geq 0$ tandisqu'il est égale à π ou $-\pi$ pour $C_n < 0$.



1.5 Transformée de Fourier

1.5.1 Définitions

a) Transformée de Fourier

On peut considérer la transformée de Fourier des fonctions non-périodiques comme une extension du développement en série de Fourier au cas où la période est infinie. Ceci fait tendre la fréquence $f_0 = \frac{1}{T_0}$ vers zéro et le spectre devient alors une fonction continue de f .

Soit un signal $s(t)$ non périodique, alors la transformée de Fourier de $s(t)$ est notée par $S(f)$, elle est définie par :

$$S(f) = TF[s(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi f t} \cdot dt$$

$S(f)$: Spectre complexe

$|S(f)|$: spectre d'amplitude

$Arg[S(f)]$: spectre de phase

b) Transformée de Fourier inverse

On peut reconstruire le signal $s(t)$ à partir de son spectre complexe $S(f)$ en utilisant la transformée de Fourier inverse, elle est définie par :

$$s(t) = TF^{-1}[S(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot e^{+j2\pi f t} \cdot df$$

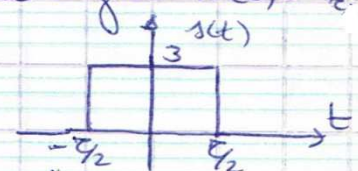
théorème : Si un signal $s(t)$ est absolument intégrable dans le sens que : $\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt < \infty$ alors $S(f) \exists$

Remarque : Si la transformée de Fourier $S(f)$ existe, $\rightarrow$ elle est unique.

Exemple d'application :

Trouver le spectre (la transformée de Fourier du signal $s(t) = 3P_{\tau}(t)$)

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} 3 e^{-j2\pi f t} dt$$



$$S(f) = \frac{-3}{j2\pi f} \cdot e^{-j2\pi f t} \Big|_{-\tau/2}^{+\tau/2} = \frac{-3}{j2\pi f} \left(e^{-j2\pi f \tau/2} - e^{j2\pi f \tau/2} \right)$$

$$S(f) = \frac{3}{\pi f} \cdot \left(\frac{e^{j\pi f \tau} - e^{-j\pi f \tau}}{2j} \right) = \frac{3}{\pi f} \cdot \sin \pi f \tau$$

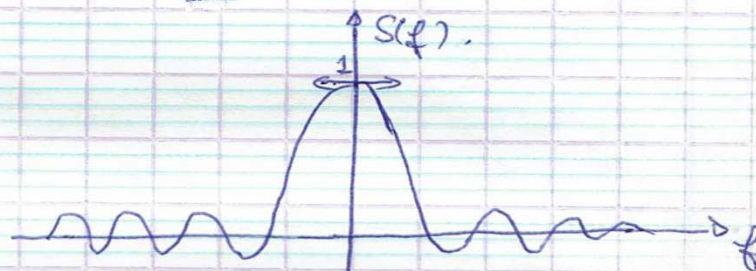
$$S(f) = 3\tau \cdot \text{sinc } \pi f \tau.$$

et on note : $3P_{\tau}(t) \xleftrightarrow{TF} 3\tau \text{ sinc } \pi f \tau.$

Ca d

$$P_{\tau}(t) \longleftrightarrow \tau \text{ sinc } (\pi f \tau)$$

$$P(t) \xleftrightarrow{\text{durée}} \text{durée sinc } (\pi f \text{ durée})$$

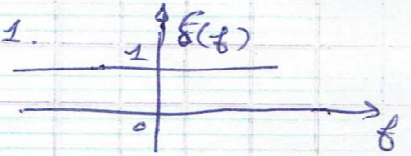


Cas particuliers

1) transformée de Fourier de la distribution de Dirac $\delta(t)$:

$$\text{T.F.}[\delta(t)] = \delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = 1.$$

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} 1$$



2) transformée de Fourier d'un signal périodique:

$$\text{Signal Périodique} \rightarrow s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad s(t) \longleftrightarrow S(f)$$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t} \right) e^{-j2\pi f t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi (n f_0 - f) t} dt}_{\delta(n f_0 - f)}.$$

$$\text{puisque : } \delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = 1$$

$$\text{et } \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{j2\pi f t} df$$

$$\Rightarrow \delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f t} dt \quad \Rightarrow \quad \delta(f - f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi (f - f_0) t} dt.$$

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C(n f_0) \delta(f - n f_0).$$

Remarque: Cette relation confirme bien que le spectre d'un signal périodique est discret.

$$C(n f_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt}_{\text{T.F. sur une période}}$$

$$C(n f_0) = \frac{1}{T_0} (\text{T.F.}(s(t)) \text{ sur une période}).$$

Propriétés de la transformée de Fourier:

1) Linéarité (superposition)

$$\text{si } s_1(t) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} S_1(f)$$

$$s_2(t) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} S_2(f)$$

$$s_3(t) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} S_3(f)$$

alors

$$s_1(t) + s_2(t) + \dots + s_n(t) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} S_1(f) + S_2(f) + \dots + S_n(f).$$

et si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des constantes alors:

$$a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t) + \dots + a_n s_n(t) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} a_1 S_1(f) + a_2 S_2(f) + \dots + a_n S_n(f)$$

Exemple:

$$s(t) = 5 \delta(t) + 2 p_{\tau}(t)$$

$$a_1 = 5$$

$$s_1(t) = \delta(t)$$

$$a_2 = 2$$

$$s_2(t) = p_{\tau}(t)$$

$$S(f) = \text{T.F.}(s(t)) = \text{T.F.}(5 \delta(t) + 2 p_{\tau}(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} [5 \delta(t) + 2 p_{\tau}(t)] e^{-j2\pi f t} dt$$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} 5 \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} 2 p_{\tau}(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$S(f) = 5 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\tau}(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$S(f) = 5 \cdot 1 + 2 \cdot \tau \text{sinc} \pi f \tau = 5 + 2\tau \text{sinc} \pi f \tau$$

2) Symétrie:

$$\text{si } s(t) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} S(f) \text{ alors}$$

$$S(t) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} s(-f)$$

Exemple:

$$s(t) = 3 p_{\tau}(t) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} S(f) = 3\tau \text{sinc} \pi f \tau$$

$$S(t) = 3\tau \text{sinc} \pi \tau t \xleftrightarrow{\text{T.F.}} 3 p_{\tau}(-f) = 3 p_{\tau}(f) \text{ (Petite paire)}$$

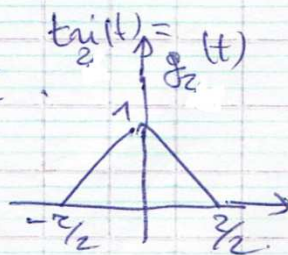
$$\tau \text{sinc} \pi \tau t \xleftrightarrow{\text{T.F.}} p_{\tau}(f)$$

le τ ici a une dimension de la fréquence

3) Similitude:

$$\text{si } s(t) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} S(f)$$

$$\text{alors } s(at) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} \frac{1}{|a|} S\left(\frac{f}{a}\right), \text{ a constante}$$



Exemple:

$$g_{\tau}(t) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} \tau \text{sinc}^2 2\pi f \left(\frac{\tau}{4}\right) = \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2 \pi f \frac{\tau}{2}$$

$$g_{\tau}(5t) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} \frac{1}{|5|} \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2 \pi \frac{f}{5} \cdot \frac{\tau}{2}$$

$$g_{\tau}(5t) \longleftrightarrow \frac{\tau}{10} \text{sinc}^2 \frac{\pi f \tau}{10}$$

4) translation en temps :

si $s(t) \xleftrightarrow{T.F.} S'(f)$ alors,
 $s(t-t_0) \xleftrightarrow{T.F.} S'(f) e^{-j2\pi f t_0}$ t_0 : constante.

Exemple :

$$s(t) = \text{sgn}(t) \xleftrightarrow{T.F.} S'(f) = \frac{1}{j\pi f}$$

$$s(t-3) = \text{sgn}(t-3) \xleftrightarrow{T.F.} \frac{1}{j\pi f} \cdot e^{-j2\pi f \cdot 3} = \frac{1}{j\pi f} \cdot e^{j6\pi f}$$

5) translation en fréquence :

si $s(t) \xleftrightarrow{T.F.} S'(f)$ Alors
 $s(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \xleftrightarrow{T.F.} S'(f-f_0)$ f_0 : constante

Exemple :

$$s(t) = u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t) \xleftrightarrow{T.F.} S'(f) = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

$$s(t) e^{j2\pi f_0 t} = u(t) e^{j2\pi f_0 t} = \frac{1}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t) e^{j2\pi f_0 t} \xleftrightarrow{T.F.} \frac{1}{2} \delta(f-f_0) + \frac{1}{j2\pi(f-f_0)}$$

$$\begin{aligned} * T.F. [\text{sgn}(t)] &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^0 a t e^{-j2\pi f t} dt + \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} -a t e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{a-j2\pi f} + \frac{1}{a+j2\pi f} \right] = \frac{1}{j\pi f} \end{aligned}$$

6) Derivation en temps :

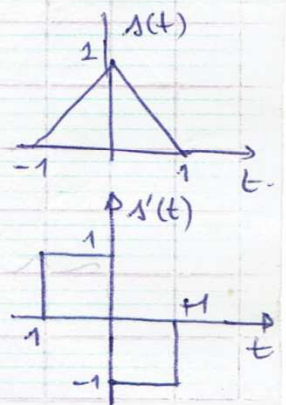
si $s(t) \xleftrightarrow{T.F.} S'(f)$ alors
 $\frac{d^n}{dt^n} [s(t)] \xleftrightarrow{T.F.} (j2\pi f)^n S'(f)$

Exemple : on sait que : si $s(t) = g_2(t)$

$$s(t) = g_2(t) \longleftrightarrow \text{sinc}^2 \pi f$$

$$g_2'(t) = s'(t) \xleftrightarrow{T.F.} (j2\pi f) \cdot \text{sinc}^2 \pi f$$

2^{ème} méthode pour confirmation trouver la T.F. des deux porte décalés.



07) Dérivation en fréquence :

si $s(t) \xrightarrow{T.F.} S'(f)$ alors

$$(-j2\pi t)^n s(t) \xrightarrow{T.F.} \frac{d^n}{df^n} [S'(f)].$$

Exemple :

$$s(t) = \text{sgn}(t) \xrightarrow{T.F.} \frac{1}{j\pi f}$$

$$(-j2\pi t) s(t) = (-j2\pi t) \text{sgn}(t) \xrightarrow{T.F.} \frac{d}{df} \left(\frac{1}{j\pi f} \right) = \frac{-1}{j\pi f^2}$$

$$t \text{sgn}(t) \xrightarrow{T.F.} \frac{-1}{-j2\pi \times j\pi f^2} = \frac{-1}{2\pi^2 f^2}$$

08) Modulation :

si $s(t) \xrightarrow{T.F.} S'(f)$ alors

$$s(t) \cos 2\pi f_0 t \xrightarrow{T.F.} \frac{1}{2} [S'(f+f_0) + S'(f-f_0)] \quad f_0 = \text{constante}$$

Exemple :

$$s(t) = u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t) \xrightarrow{T.F.} \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

$$s(t) \cdot \cos 2\pi f_0 t = u(t) \cos 2\pi f_0 t \xrightarrow{T.F.} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \delta(f+f_0) + \frac{1}{j2\pi(f+f_0)} + \frac{1}{2} \delta(f-f_0) + \frac{1}{j2\pi(f-f_0)} \right]$$

$$s(t) \cdot \cos 2\pi f_0 t \xrightarrow{T.F.} \frac{1}{4} \delta(f+f_0) + \frac{1}{j4\pi(f+f_0)} + \frac{1}{4} \delta(f-f_0) + \frac{1}{j2\pi(f-f_0)}$$

théorème de Parseval :

l'énergie d'un signal $s(t)$ est : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t) \cdot s(t) dt$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t) \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi f t} df \right] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t) S(f) e^{j2\pi f t} dt df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t) e^{j2\pi f t} dt \right] df = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) S^*(f) df$$

$$\Rightarrow E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df \quad \text{où } s(t) \xrightarrow{T.F.} S(f)$$

Càd : l'énergie dans le domaine temps = l'énergie dans le domaine fréquentiel

1.6 Produit de convolution

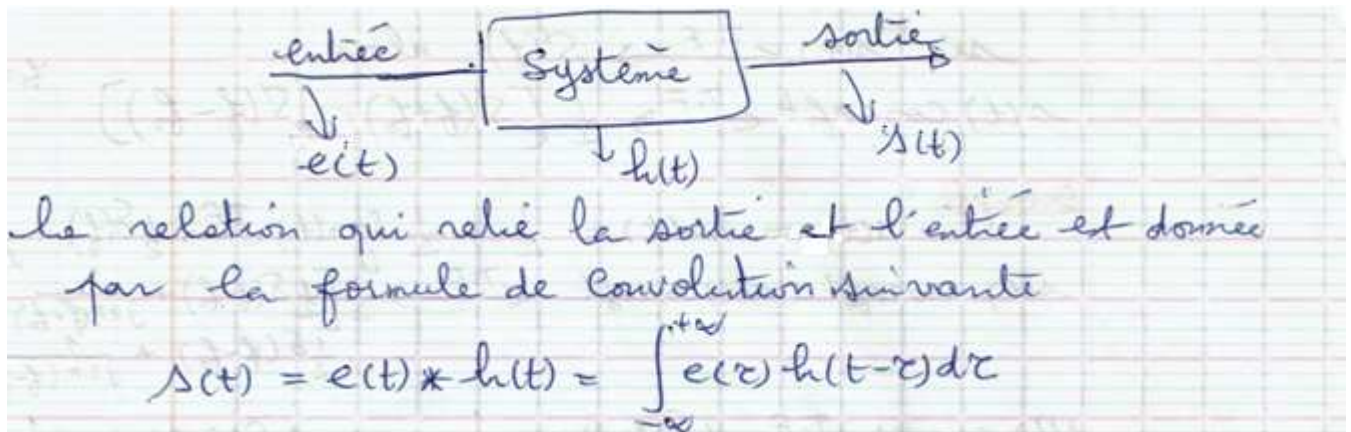
Le produit de convolution entre deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ est défini par la relation suivante :

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) \cdot s_2(t - \tau) \cdot d\tau$$

Le produit de convolution est appelé aussi (composition de Schwartz).

1.6.1 Produit de convolution et système

Soit le système linéaire est invariant dans le temps défini par le schéma synoptique de la figure suivante :



Avec :

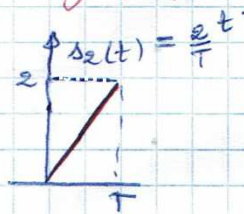
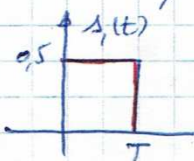
$h(t)$: réponse impulsionnelle
cà d la réponse en sortie à une entrée $\delta(t)$.

t : c'est le temps d'application, $t - \tau$: t'emps d'apparition.

si le système est linéaire causal $h(t - \tau) \equiv 0$ si $t < \tau$.
 $\Rightarrow s(t) = \int_{-\infty}^t e(\tau) h(t - \tau) d\tau$.
si le signal est causal :
 $s(t) = \int_0^t e(\tau) h(t - \tau) d\tau$.

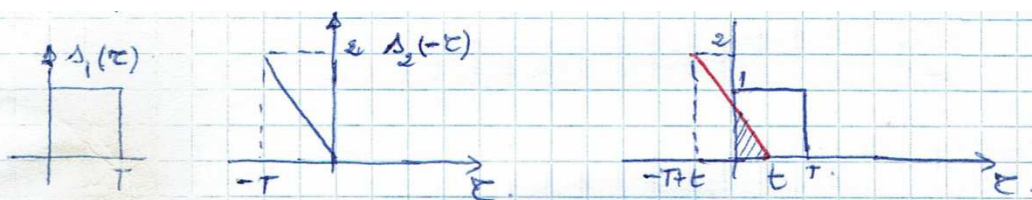
1.6.2 Interprétation graphique et évaluation de la convolution :

soit à composer :



$$s_1(t) * s_2(t) = ?$$

Solution

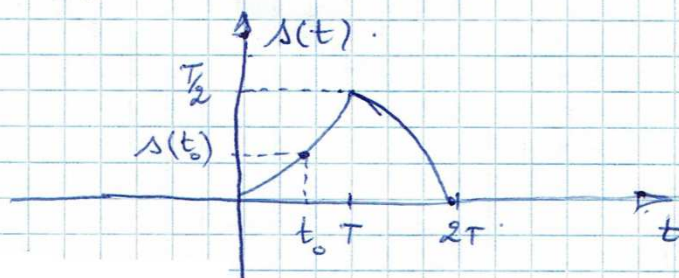


* $t < 0 \Rightarrow \Delta(t) = 0$

* $0 < t \leq T \Rightarrow \Delta(t) = \int_0^t 0,5 \cdot \left(-\frac{2\tau}{T} + \frac{2t}{T}\right) d\tau = \frac{1}{T} \int_0^t (-\tau + t) d\tau = \frac{1}{T} \left(-\frac{\tau^2}{2} + t\tau\right) \Big|_0^t$
 $\Delta(t) = \frac{t^2}{2T}$

* $0 < -T+t \leq T \Rightarrow T \leq t \leq 2T \Rightarrow \Delta(t) = \frac{1}{T} \int_{-T+t}^T (-\tau + t) d\tau = \frac{1}{T} \left(-\frac{\tau^2}{2} + t\tau\right) \Big|_{-T+t}^T$
 $\Delta(t) = -\frac{1}{2T} + t$

* $-T+t \geq T \Rightarrow t \geq 2T \Rightarrow \Delta(t) = 0$



1.6.3 Propriétés de la convolution

1 - commutativité : $\Delta_1(t) * \Delta_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_1(\tau) \Delta_2(t-\tau) d\tau$, on pose $v = t - \tau \Rightarrow dv = -d\tau$
 $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_2(v) \Delta_1(t-v) dv = \Delta_2(t) * \Delta_1(t)$
 $\Delta_1(t) * \Delta_2(t) = \Delta_2(t) * \Delta_1(t)$

2 - Associativité : $\Delta_1 * [\Delta_2 * \Delta_3] = [\Delta_1 * \Delta_2] * \Delta_3$

3 - Distributivité :

$$\Delta_1(t) * [\Delta_2(t) + \Delta_3(t)] = \Delta_1(t) * \Delta_2(t) + \Delta_1(t) * \Delta_3(t)$$

4 - Dérivation de la convolution :

$$\frac{d}{dt} [\Delta_1(t) * \Delta_2(t)] = \frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_1(\tau) \Delta_2(t-\tau) d\tau \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_1(\tau) \frac{d\Delta_2(t-\tau)}{dt} d\tau$$

$$= \Delta_1(t) * \frac{d\Delta_2(t)}{dt} = \frac{d\Delta_1(t)}{dt} * \Delta_2(t)$$

5- L'aire de $s_1(t) * s_2(t) = A$.

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) * s_2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) s_2(t-\tau) d\tau dt$$

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t-\tau) dt \right) d\tau = \text{Aire de } s_1(t) \times \text{aire } s_2(t)$$

Aire de $s_2(t)$

$$\text{Aire } [s_1(t) * s_2(t)] = \text{aire } s_1(t) \cdot \text{aire } s_2(t)$$

6 Élément neutre de la convolution

l'impulsion de Dirac $\delta(t)$ représente l'élément neutre de la convolution. Càd :

$$s(t) * \delta(t) = \delta(t) * s(t) = s(t)$$

1.6.4. Théorème de la convolution :

Soit à calculer $TF[s_1(t) * s_2(t)] = ?$

$$TF[s_1(t) * s_2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) s_2(t-\tau) d\tau \right] e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t-\tau) e^{-j2\pi ft} dt \right] d\tau$$

$$TF[s_1(t) * s_2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) \cdot S_2(f) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau = S_1(f) \cdot S_2(f)$$

$$\therefore TF[s_1(t) * s_2(t)] = S_1(f) \cdot S_2(f)$$

et $TF[s_1(t) \cdot s_2(t)] = S_1(f) * S_2(f)$

1.7 Corrélation :

Elle est utilisée dans le but de l'interprétation des signaux (extraction de l'information), son rôle est de l'étude de la similarité et de savoir à quel point deux signaux peuvent se ressembler dans le temps

1.7.1. Fonction d'Autocorrélation : (F.A.C)

Consiste à comparer une fonction $s(t)$ avec elle même durant un intervalle de temps, dont l'une est décalée d'une certaine valeur " τ " elle est définie par :

$$R_s(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot s(t+\tau) dt \quad (\text{signaux réels}).$$

(en générale)

La fonction $R_s(\tau)$ d'un signal $s(t)$ a les dimensions d'une énergie pour les signaux à énergie finie.

1.7.2 Propriétés de la F.A.C. des signaux à énergie finie :

propriété 1 : $R_s(0) = R_s(\tau)|_{\tau=0} = E = (\text{Énergie dans } s(t))$

propriété 2 : $R_s(\tau)$ est une fonction paire de τ .

$$R_s(\tau) = R_s(-\tau)$$

* L'énergie d'un signal est donnée par :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df \quad \text{d'après Th de Parseval}$$

On appelle densité spectrale d'énergie la fonction :

$$\varphi(f) = |S(f)|^2$$

✓ Propriété 1 : $\varphi(f) \geq 0 \forall f$

✓ Propriété 2 : $\varphi(f) = \varphi(-f)$

✓ Propriété 3 : la fonction d'autocorrélation $R_s(\tau)$ et la densité spectrale d'énergie $\varphi(f)$

constituent une paire de la transformée de Fourier. Càd :

$$TF[R_s(\tau)] = \varphi(f) = |S(f)|^2$$

1.7.3 système linéaire de signaux à énergie finie

avec $h(t)$: réponse impulsionnelle du système linéaire invariant dans le temps (LIT)

$y(t)$: caractérise la réponse temporelle du système à l'excitation $x(t)$

soient $x(t) \xleftrightarrow{T.F} X(f)$ et $h(t) \xleftrightarrow{T.F} H(f)$, $y(t) \xleftrightarrow{T.F} H(f) \cdot X(f)$

alors : la D.S.E de $y(t)$ est donnée par :

$$\varphi_y(f) = |Y(f)|^2 = |H(f)|^2 \cdot |X(f)|^2$$

$$\varphi_y(f) = \varphi_x(f) \cdot |H(f)|^2$$

1.7.4 Fonction d'intercorrélation : (F.I.C) Pour les (S.E.F)

supposons qu'on a deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ (S.E.F) on définit :

$$R_{s_1 s_2}(\tau) = R_{s_2 s_1}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2(t+\tau) dt$$

= Fonction d'intercorrélation de $s_1(t)$ et $s_2(t)$

$$\text{Propriétés : } R_{s_1 s_2}(\tau) = R_{s_2 s_1}(-\tau)$$

On appelle $\varphi_{12} = TF[R_{12}(\tau)]$ densité interspectrale d'énergie (D.I.E).

1.7.5 Signaux à Puissance finie (S.P.F.).

soit $s(t)$ un signal à (S.P.F) et réel alors.

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt < \infty.$$

alors $R_{sp}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) s(t+\tau) dt.$

= Fonction d'autocorrélation d'un signal "S.P.F"

avec $R_{sp}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt = "P" \text{ Puissance dans } s(t).$

$$\Phi_s(f) = TF \{ R_{sp}(\tau) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{sp}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau.$$

$\Phi_s(f)$: Densité spectrale de puissance "D.S.P"

$$\text{donc } R_{sp}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_s(f) e^{j2\pi f \tau} df.$$

$$\text{avec } P = R_{sp}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_s(f) df.$$

Propriétés:

Propriété 1.

$$|R_{sp}(\tau)| \leq R_{sp}(0)$$

propriété 2

$$R_{sp}(\tau) = R_{sp}(-\tau)$$

Fonction d'intercorrélation pour les signaux S.P.F.

soit $s_1(t)$ et $s_2(t)$ 2 signaux à P.F.

on définit

$$R_{12p}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_1(t) s_2(t+\tau) dt$$

(Fonction d'intercorrélation de $s_1(t)$ et $s_2(t)$).

Propriété 1: $R_{12p}(\tau) = R_{21}(-\tau)$

definition: on appelle Densité interspectrale de puissance de $s_1(t)$ et $s_2(t)$

$$\Phi_{12}(f) = TF \{ R_{12p}(\tau) \}$$