

Chapitre V : Validation du model

1. Introduction :

Dans ce chapitre, on effectuera certaines simulations afin de valider les différents algorithmes détaillés dans les chapitres précédents.

2. Les applications pour les méthodes d'identifications graphiques

2.1 Méthode de Strejc-Quentin :

Pour tester cette méthode, on considère un système dont la fonction de transfert est donnée par :

$$H(p) = \frac{100}{(p + 4)(p + 5)(p + 1)}$$

Le modèle mathématique proposé par Strejc-Quentin est de la forme suivante :

$$H(p) = \frac{K e^{-\tau p}}{(1 + T p)^n}$$

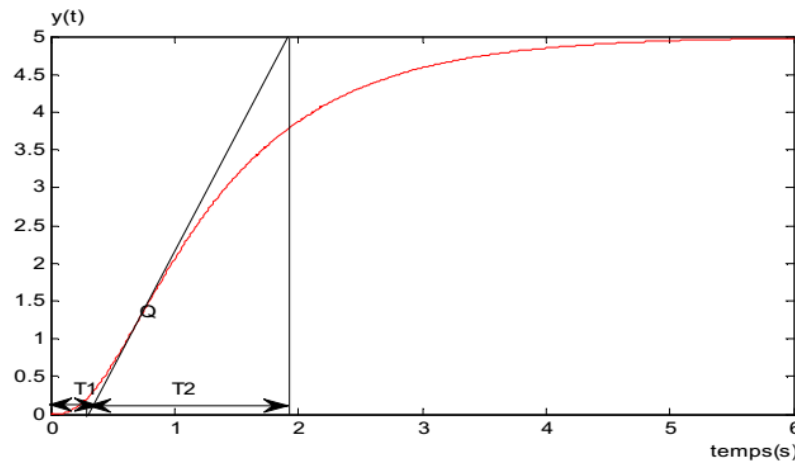


Figure (V.1) : Réponse indicielle du procédé.

La méthodologie :

- Le gain statique est mesuré directement de la valeur finale de la sortie : $K=5$.
- On trace la tangente au point d'inflexion Q et on mesure $T1 = 0.32$ s et $T2=1.58$ s.
- D'après le tableau, avec $T1/T2 = 0.202$, un ordre $n=2$ semble convenir.
- La constante de temps T est évaluée à partir de $T2/T = 2.718$ de tableau du Strejc-Quentin, Cela donne $T = 0.58$ s
- D'après le tableau, $T1/T = 0.282$, ce qui donnerait une valeur de $T1=0.163$ s. Or on mesure $T1=0.32$ s
- On peut déduire un retard $\tau = 0.157$ s

En remplaçant les paramètres obtenus, on aura

$$H(p) = \frac{5e^{-0.157p}}{(1 + 0.58p)^2}$$

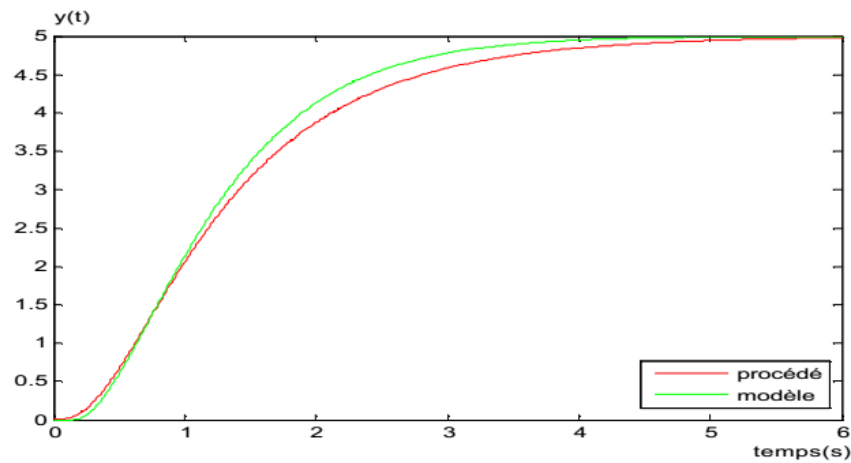


Figure (V.2) : Réponse indicielle du procédé et du modèle.

D'après la figure (V.2), on remarque que la réponse indicielle du procédé est proche de celle du modèle de Strejc- Quentin mais la réponse de ce dernier est plus retardée.

2.2 Méthode de Broïda :

On reprend la même fonction de transfert que précédemment

$$H(p) = \frac{100}{(p + 4)(p + 5)(p + 1)}$$

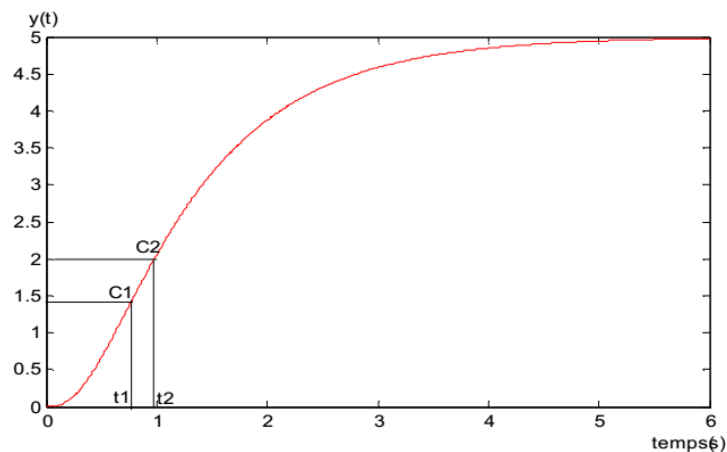


Figure (V.3) : Réponse indicielle du procédé.

Soit la fonction de transfert du modèle de Broïda suivant :

$$H(p) = \frac{K e^{-\tau p}}{(1 + Tp)}$$

Avec :

K, T, τ sont les paramètres à identifier.

Les points communs C1 et C2 habituellement utilisés correspondent respectivement à 28% et 40% de la valeur finale.

D'après la figure (V.3), on relève les valeurs de t1 et t2 correspondant respectivement à la projection de C1 et C2 sur l'axe des abscisses. Donc t1= 0.721 s et t2=0.942 s.

$$T = 5.5 (t_2 - t_1)$$

$$\tau = 2.8 t_1 - 1.8 t_2$$

Le gain statique est mesuré directement de la valeur finale de la sortie $K=5$ comme dans la méthode de Strejc-Quentin.

En remplaçant les valeurs de K , T , τ , on aura :

$$H(p) = \frac{5e^{-0.32p}}{(1 + 1.21p)}$$

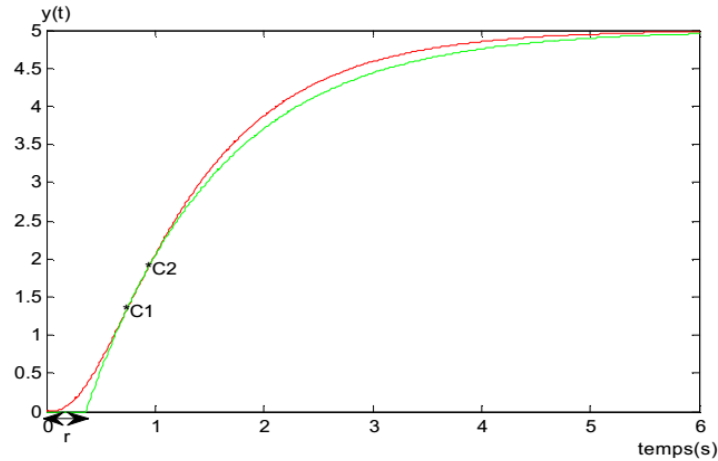


Figure (V.4) : Réponse indicielle du procédé et du modèle.

La figure (V.4) donne les courbes de réponse du système réel et du modèle de Broïda. La concordance des deux points C1 et C2 est bien vérifiée, or la réponse indicielle du modèle de Broïda comporte un retard τ .

2.3 Processus intégrateur :

Pour tester cette méthode, on considère un système de deuxième ordre dont la fonction de transfert est donnée par :

$$H(p) = \frac{100}{p(10p + 3)}$$

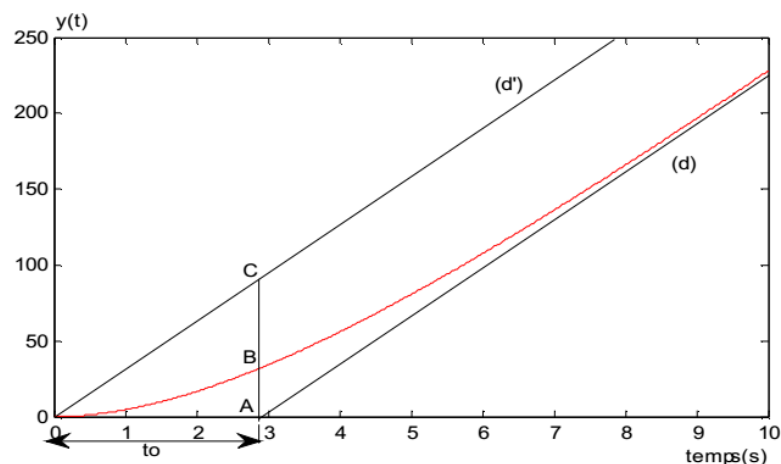


Figure (V.5) : Réponse indicielle du processus intégrateur du 2^{ème} ordre.

Avec :

- (d) : représente l'asymptote de la courbe.
- (d') : représente une droite parallèle à l'asymptote (d).

- A : représente le point d'intersection entre l'axe des abscisses et l'asymptote (d).
- B : représente le point d'intersection entre la courbe et la droite (AC).
- C : représente le point d'intersection entre la droite (d') et (AC).

La fonction de transfert du modèle est sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{K}{p} \frac{1}{(1 + Tp)^n}$$

Où : K, T, n sont les paramètres à identifier.

De la figure (V.5) on mesure le rapport $\frac{AC}{AB} = \frac{93.56}{32.11} = 0.34$ et grâce au tableau du processus intégrateur, on peut déduire la valeur de $n=2$. La constante de temps T est déterminée par la relation : $T = \frac{t_o}{n} = \frac{9.2}{2} = 1.45s$, avec t_o c'est la valeur mesurée sur la figure (V.5).

En remplaçant les valeurs de K, T et n, on aura :

$$H(p) = \frac{33.33}{p(1 + 1.45p)^2}$$

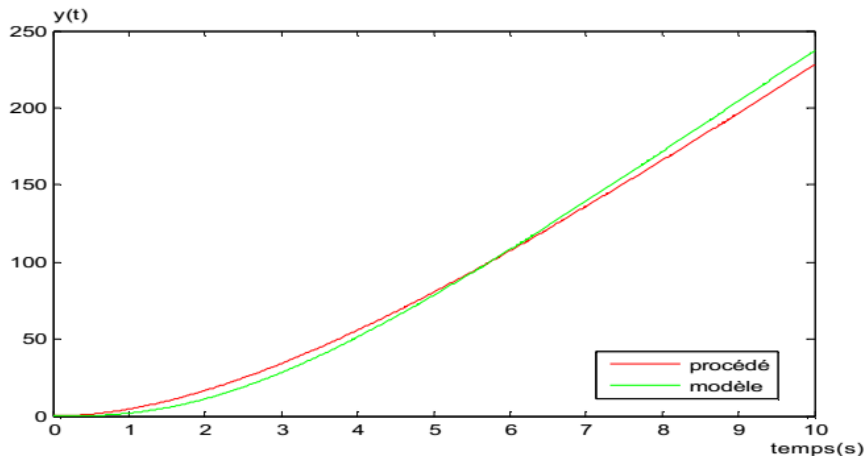


Figure (V.6) : Réponse indicielle du modèle et du processus intégrateur du 2^{ème} ordre.

Commentaires :

D'après les allures obtenues dans les figures (V.2) et (V.4) pour les méthodes de Strejc-Quentin et Broïda, on constate que :

- La sortie du modèle de Strejc-Quentin est mieux que la sortie du modèle de Broïda vu le retard des deux méthodes (le retard de strejc-quentin est inférieur à celui de Broïda).
- La difficulté de la méthode de Strejc-Quentin se pose essentiellement dans la détermination de point d'inflexion et le tracé de la tangente.
- La méthode de Broïda est moins onéreuse (en terme des étapes à suivre) que celle de Strejc-Quentin.
- Pour les systèmes ayant un intégrateur, on a abouti à une réponse indicielle du modèle de processus intégrateur plus au moins proche de celle du procédé, comme nous la montre la figure (V.6).

3. Les applications pour les méthodes d'identification statistiques :

3.1 Méthode des moindres carrés récurrents (M.C.R) :

Soit un système de premier ordre dont la fonction de transfert est la suivante :

$$G(p) = \frac{9}{1 + 6p}$$

Après la discrétisation du système continu, avec une période d'échantillonnage $T_e=1.75s$, on aura la fonction de transfert discrète tel que :

$$G(z) = \frac{2.277}{z - 0.747}$$

Qu'on peut mettre sous la forme suivante :

$$G(z^{-1}) = \frac{2.277z^{-1}}{1 - 0.747z^{-1}}$$

Soit la fonction de transfert discrète du modèle du système à identifier qui est donné par :

$$\hat{G}(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

La forme récurrente du modèle étant :

$$y(t + 1) = -a_1 y(t) + b_1 u(t) + e(t)$$

Tel que $\theta = [a_1 \ b_1]$ est le vecteur des paramètres à identifier.

Pour exciter tous les modes du processus, on lui applique un signal riche en fréquences proche d'un bruit blanc. On choisit pour cela une séquence binaire pseudo-aléatoire (S.B.P.A).

Dans cet exemple, on choisit une séquence pseudo-aléatoire, comme signal d'entrée, qui est donnée par la figure (V.7).

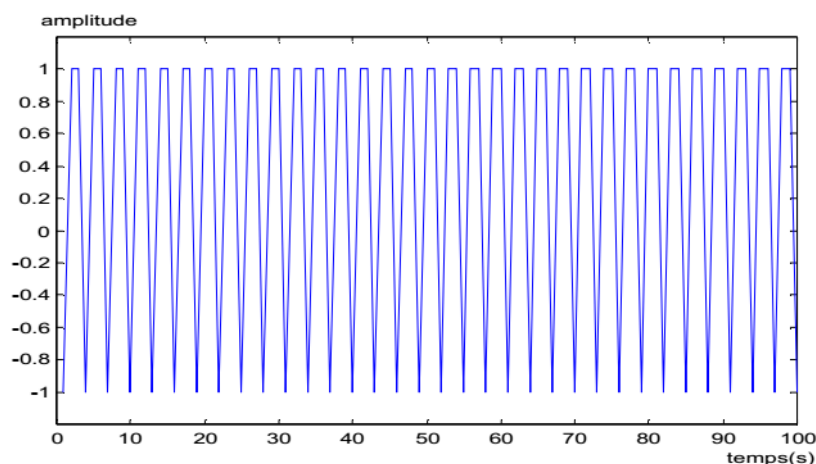


Figure (V.7) : Séquences binaires pseudo aléatoires SBPA.

Après l'application de l'algorithme des moindres carrés récurrents (M.C.R) implanté sous logiciel Matlab, nous avons relevé les paramètres du modèle de prédiction ainsi que les différentes courbes représentées dans les figures ci-dessous :

3.1.1 Système du premier ordre :

On reprend les mêmes exemples que précédemment, mais cette fois –ci on ajoute un bruit blanc gaussien, la forme récurrente du modèle discrétisé étant :

$$y(t + 1) = -a_1 y(t) + b_1 u(t) + e(t)$$

Avec : $e(t)$ un bruit gaussien.

Pour valider le modèle il faut que l'autocorrélation du l'erreur soit proche de celle du bruit blanc.

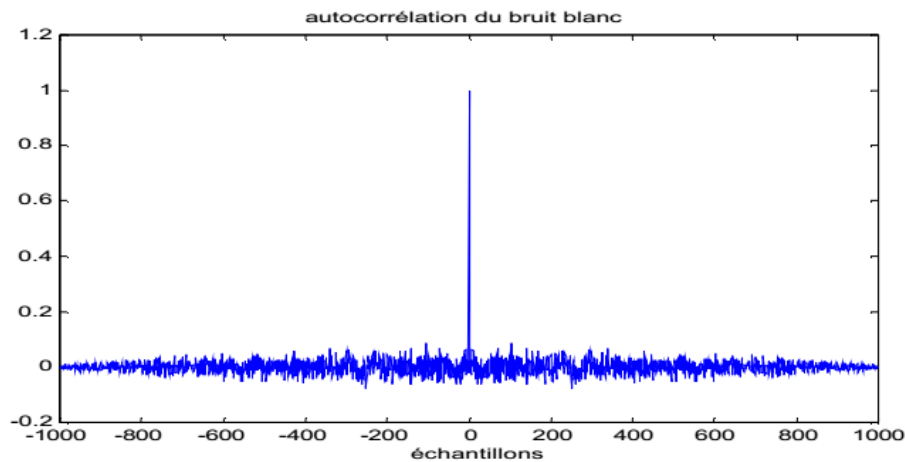


Figure (V.8) : Autocorrélation du bruit blanc gaussien.

$\theta = [a_1 \ b_1]$ Vecteur des paramètres à identifier.

Les paramètres identifiés sont : $a_1 = -0.7626$, $b_1 = 2.2719$

Les différentes courbes relevées :

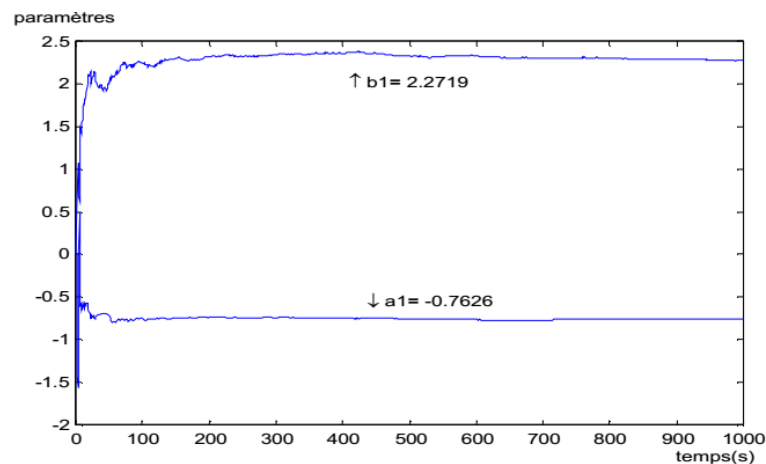


Figure (V.9) : Evolution des paramètres du modèle du 1er ordre.

Erreur quadratique = 0.0461

Test de validation : blancheur de l'erreur

- Energie du l'erreur = Variance (erreur) = 0.0063
- Energie du procédé = Variance (procédé) = 4.6571
- Energie du modèle = Variance (modèle) = 4.7745

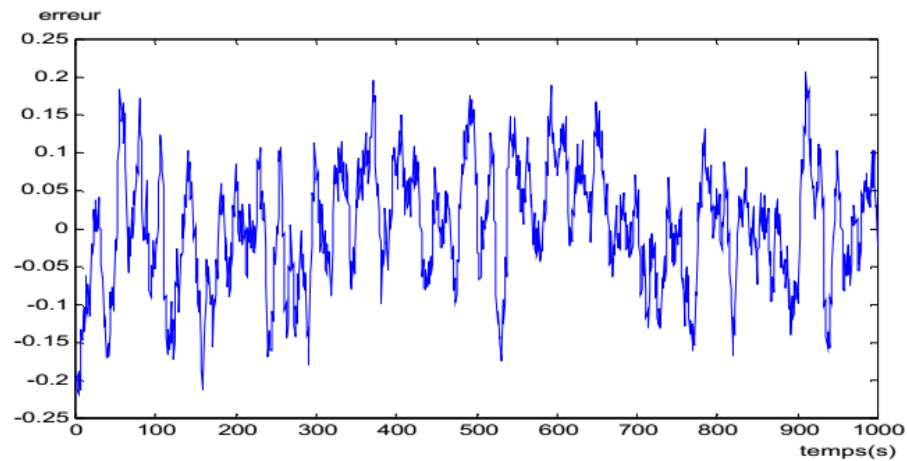


Figure (V.10) : Erreur de prédiction.

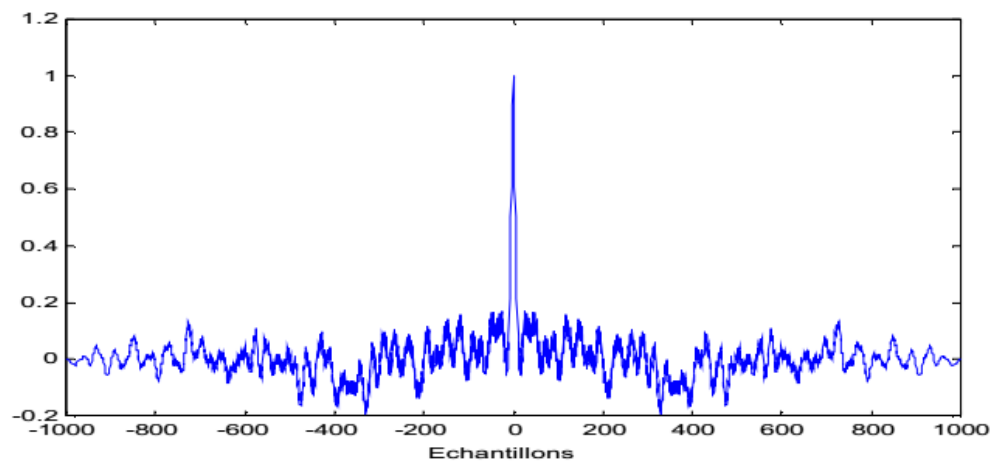


Figure (V.11) : Autocorrélation du l'erreur de prédiction.

D'après la figure (V.11), on peut dire que ce modèle est validé, car l'autocorrélation de l'erreur de prédiction est proche du celle du bruit blanc.

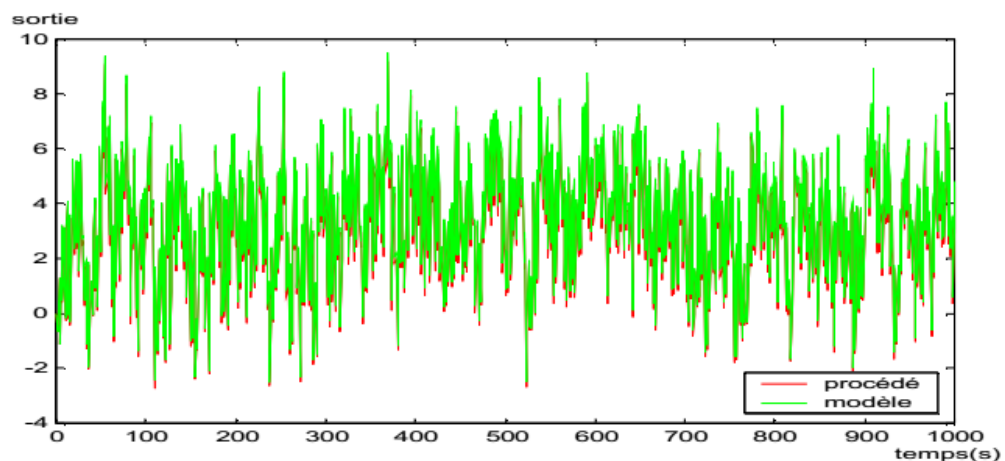


Figure (V.12) : Les sorties du procédé et du modèle.

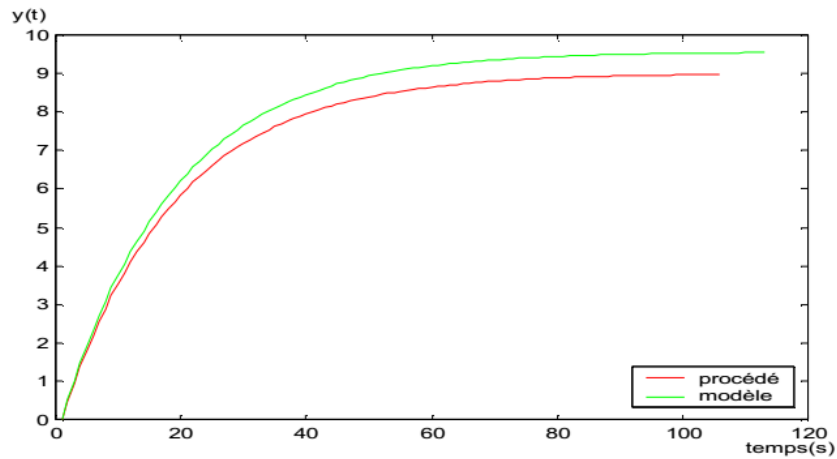


Figure (V.13) : Réponse indicielle du procédé et du modèle.

3.1.2 Système de 2^{ème} ordre :

Soit un système de deuxième ordre qui est donné par la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{1}{1 + 3p + 3p^2}$$

Après la discrétisation du système avec une période d'échantillonnage de $T_e=2s$ on aura :

$$G(z) = \frac{0.344z + 0.1749}{z^2 - 0.6165z + 0.1353}$$

Qu'on peut s'écrire sous la forme :

$$G(z) = \frac{0.344z^{-1} + 0.1749z^{-2}}{1 - 0.6165z^{-1} + 0.1353z^{-2}}$$

Soit la fonction de transfert discrète du modèle du système à identifier qui est donné par :

$$\hat{G}(z^{-1}) = \frac{b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 - a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

La forme récurrente du modèle discrétisé étant :

$$y(t+1) = -a_1y(t) - a_2y(t-1) + b_1u(t) + b_2u(t-1) + e(t)$$

Avec :

$e(t)$ un bruit gaussien

$\theta = [a_1 \ a_2 \ b_1 \ b_2]$ est le vecteur des paramètres à identifier.

Les paramètres identifiés sont :

$a_1 = -0.58338$, $a_2 = 0.13906$, $b_1 = 0.34228$ et $b_2 = 0.16818$

Les différentes courbes relevées :

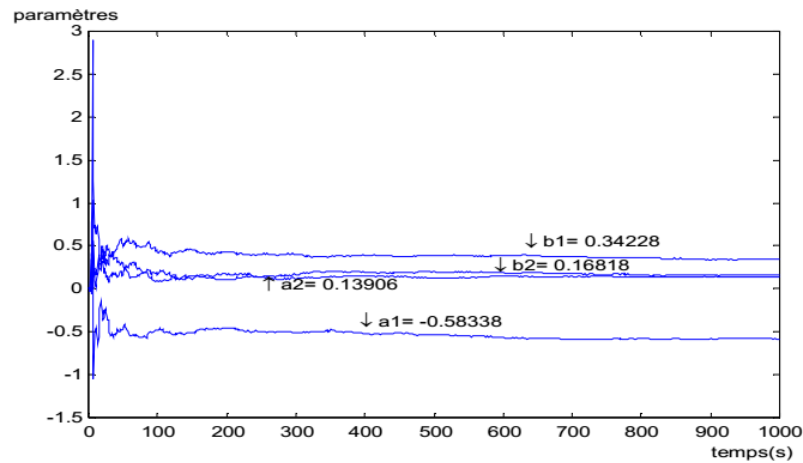


Figure (V.14) : Evolution des paramètres du modèle du 2^{ème} ordre.

Erreur quadratique = 0.3641

Test de validation : blancheur de l'erreur

- Energie du l'erreur = Variance (erreur) = 0.2851
- Energie du procédé = Variance (procédé) = 1.4260
- Energie du modèle = Variance (modèle) = 1.735

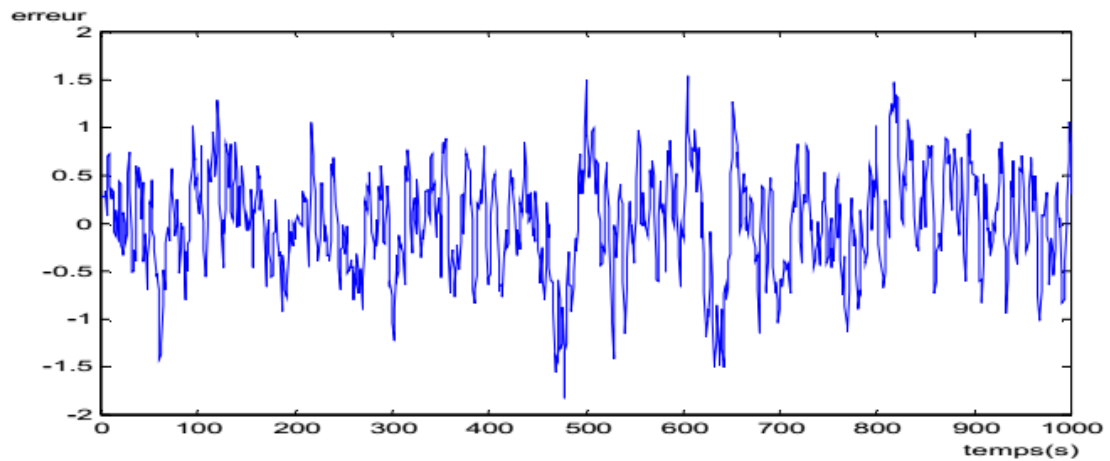


Figure (V.15) : Erreur de prédiction

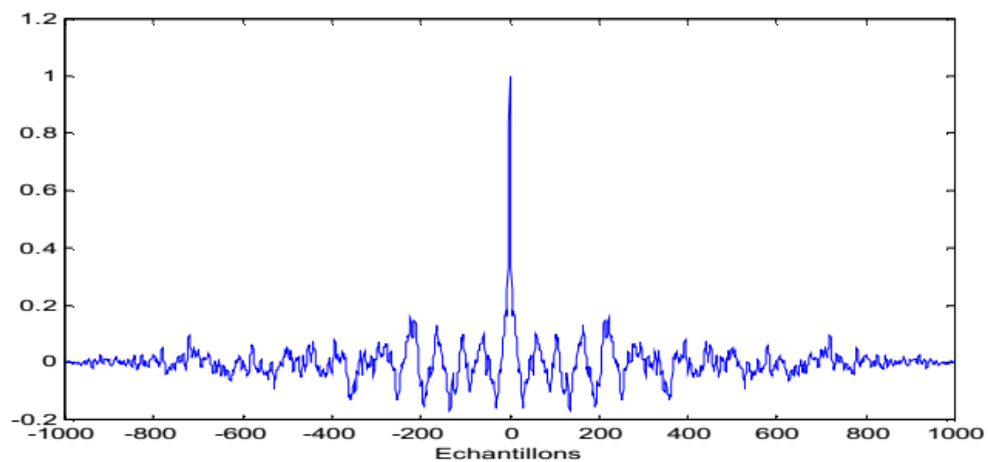


Figure (V.16) : Autocorrélation du l'erreur de prédiction.

D'après la figure (V.16), on peut dire que ce modèle est validé, car l'autocorrélation de l'erreur de prédiction est proche de celle du bruit blanc.

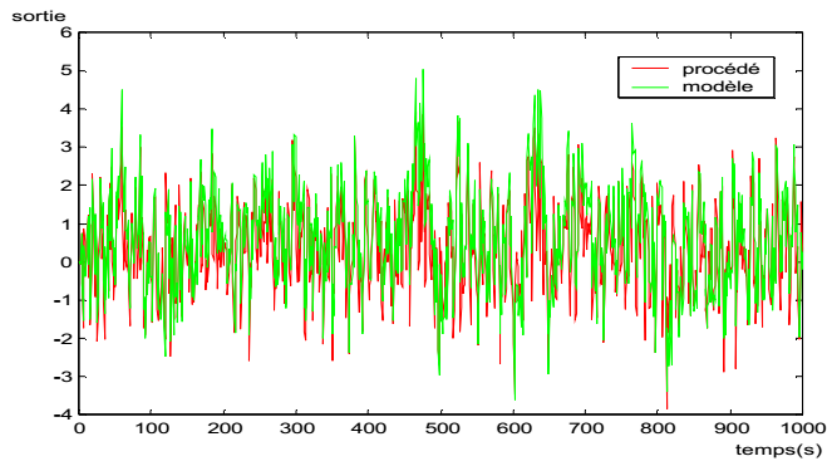


Figure (V.17) : Les sorties du système et du modèle.

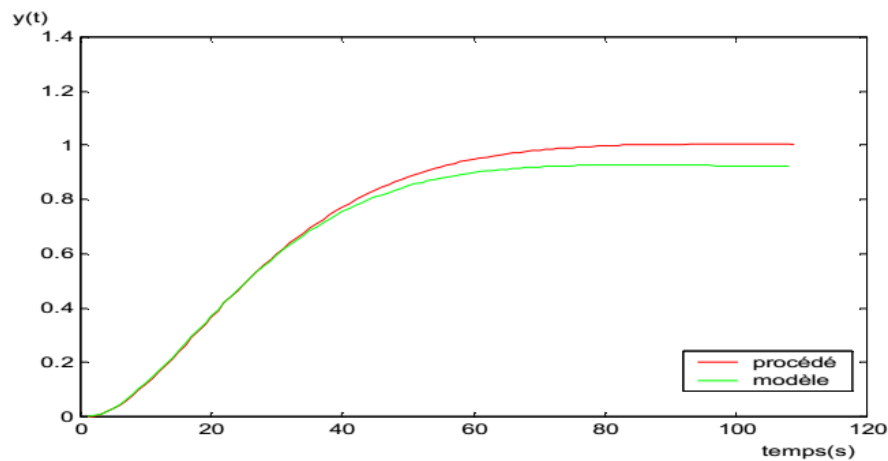


Figure (V.18) : Réponse indicielle du modèle et du procédé.

Les résultats obtenus à partir des exemples précédents montrent que les paramètres retrouvés convergent vers les vrais paramètres du procédé comme nous le montre les figures (V.9) et (V.14). On constate que les valeurs des erreurs quadratiques et les réponses indicielles (voir les figures (V.13) et (V.18)) obtenues en utilisant la méthode des moindres carrés récursifs ne sont pas satisfaisantes, ce qui nous ramène à considérer une autre structure « procédé + perturbation » par exemple la structure S3.

Nous choisissons, parmi les méthodes d'identification applicables à la structure S3, la méthode de moindre carré étendu (M.C.E) et la méthode de variable instrumental à observations retardées (V.I.O.R).

3.2 La méthode de moindre carrée étendue (M.C.E):

On reprend le même exemple du système du premier ordre, la forme récurrente du modèle discrétisé étant :

$$y(t+1) = a_1 y(t) + b_1 u(t) + c_1 e(t) + e(t+1)$$

Avec : $e(t)$ un bruit gaussien, $c_1 = 0.43$

Tel que : $\theta = [a_1 \ b_1 \ c_1]$ est le vecteur des paramètres à identifier.

Les paramètres identifiés sont : $a_1 = -0.74429$, $b_1 = 2.2843$ et $c_1 = 0.41492$

Les différentes courbes relevées :

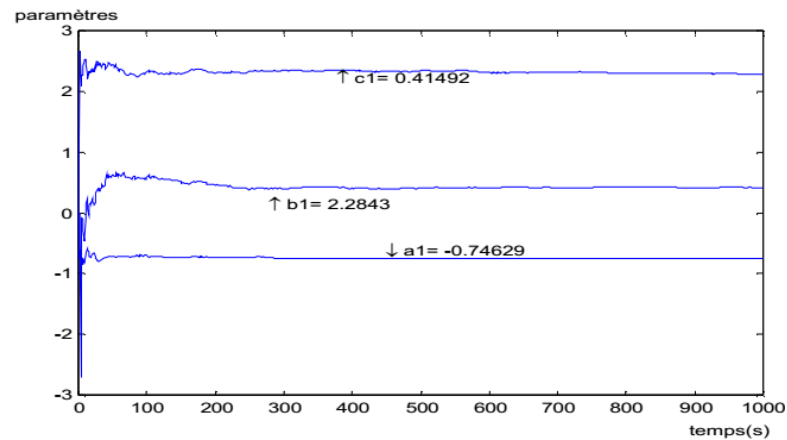


Figure (V.19) : Evolution des paramètres du modèle du 1^{er} ordre.

Erreur quadratique = $7.4031e-004$

Test de validation : blancheur de l'erreur

- Energie du l'erreur = Variance (erreur) = $7.3852e-004$
- Energie du procédé = Variance (procédé) = 6.4895
- Energie du modèle = Variance (modèle) = 6.4075

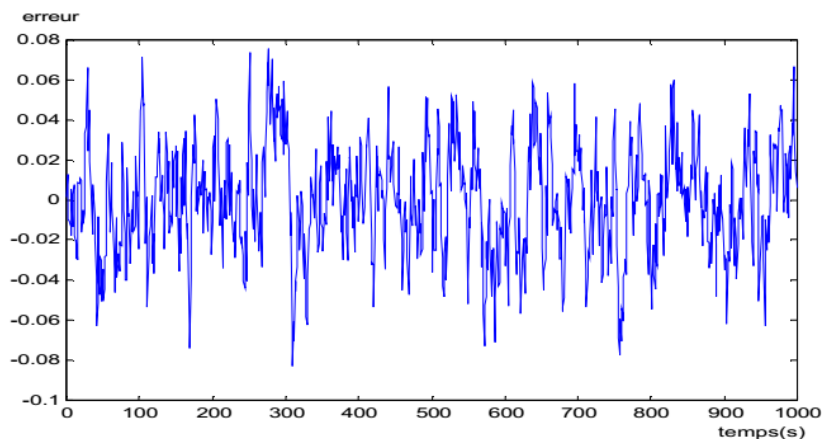


Figure (V.20) : Erreur de prédiction.

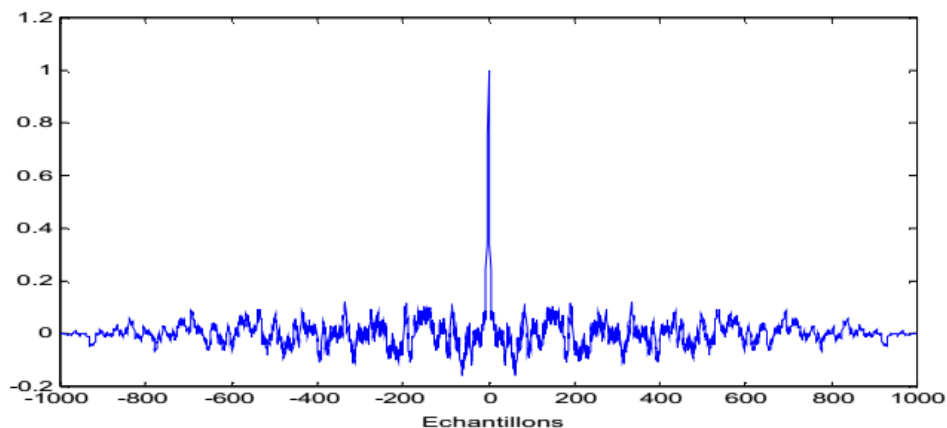


Figure (V.21) : Autocorrélation de l'erreur de prédiction.

D'après la figure (V.21), on peut dire que ce modèle est validé, car l'autocorrélation de l'erreur de prédiction est proche de celle du bruit blanc.

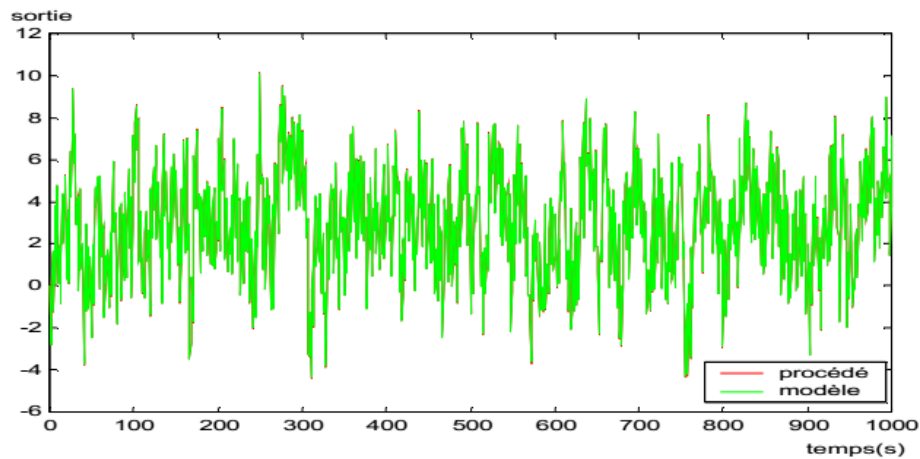


Figure (V.22) : Les sorties du système et du modèle.

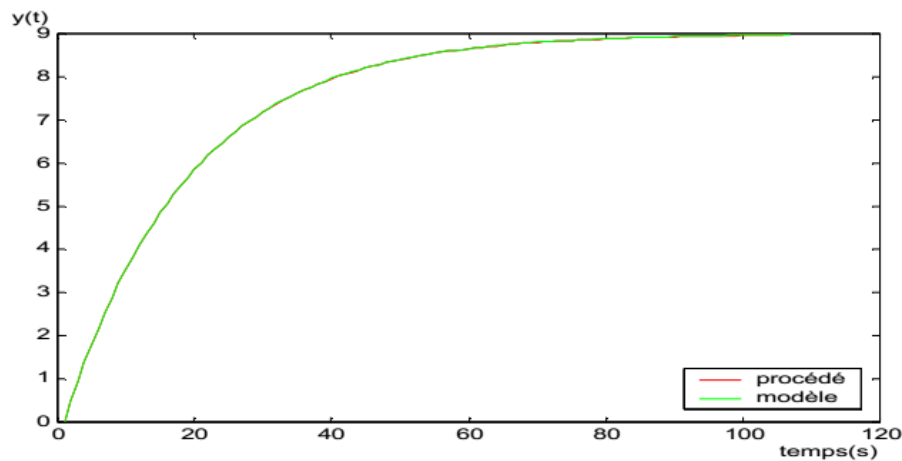


Figure (V.23) : Réponse indicielle du modèle et du procédé.

On constate que les valeurs estimées de a_1 et b_1 sont meilleures que dans le cas des moindres carrés récurrents (l'erreur quadratique est plus faible), d'autre part, l'autocorrélation (figure V.21) de l'erreur est beaucoup plus proche de celle du bruit blanc, et la réponse indicielle du modèle se confond avec celle du procédé (voir la figure (V.23)).

3.3 La méthode de variable instrumentale à observations retardées :

On reprend le même exemple du système du premier ordre. La forme récurrente du modèle discrétisé étant :

$$y(t+1) = a_1 y(t) + b_1 u(t) + c_1 e(t) + e(t+1)$$

Avec : $e(t)$ un bruit gaussien, $c_1 = 0.43$

Tel que : $\theta = [a_1 \ b_1]$ est le vecteur des paramètres à identifier.

Les paramètres identifiés sont : $a_1 = -0.763$ et $b_1 = 2.289$

Les différentes courbes relevées :

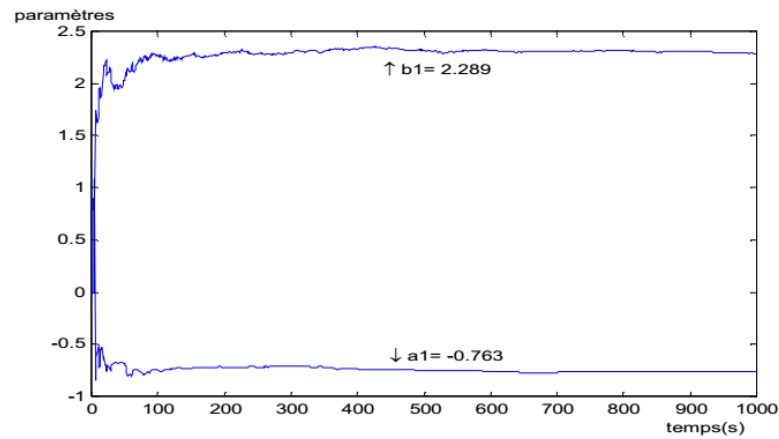


Figure (V.24) : Evolution des paramètres du modèle.

Erreur quadratique = 0.0611

Test de validation : décorrélation prédiction/erreur

- Energie du l'erreur = Variance (erreur) = 0.0070
- Energie du modèle = Variance (modèle) = 5.0195
- Energie du procédé = Variance (procédé) = 5.1774

Critère de validation : $|RN(i)| \leq 0.15$

$RN(1) = 3.9198e - 13$

Avec $RN(i)$: les intercorrélations normalisées. $i = 1, 2, 3, \dots, \max(n_A, n_B + d)$

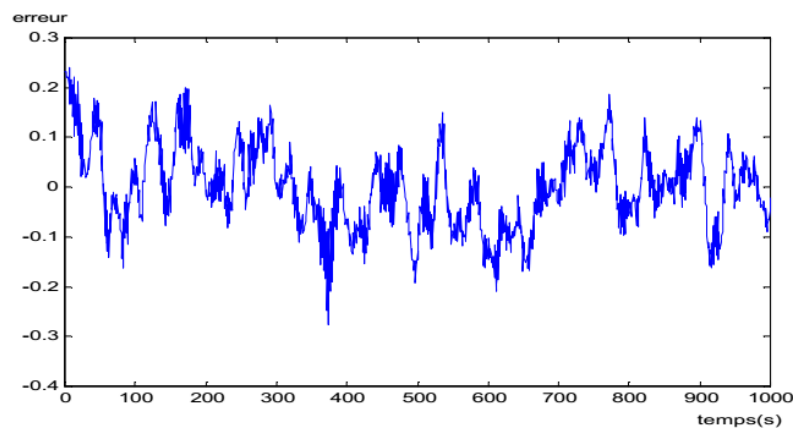


Figure (V.25) : Erreur de prédiction.

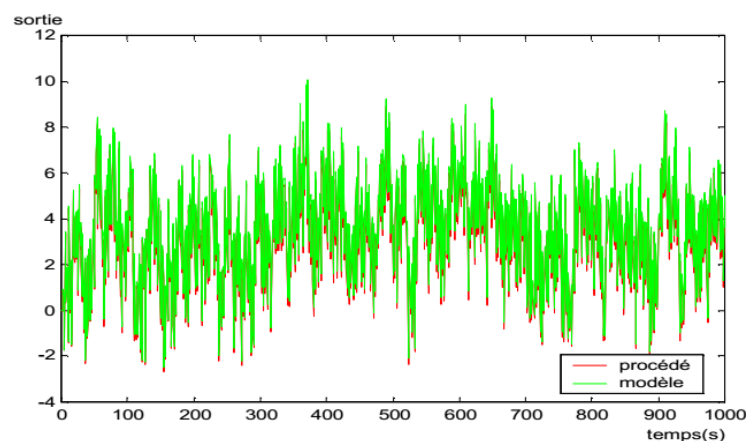


Figure (V.26) : Les sorties du procédé et du modèle.

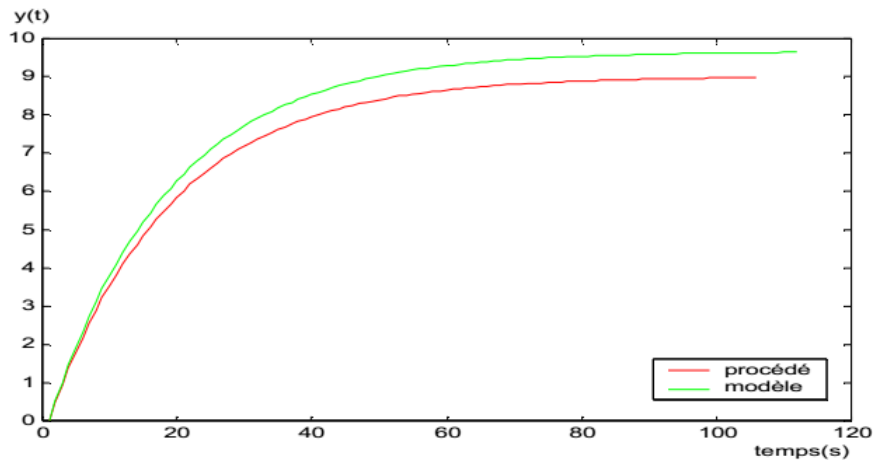


Figure (V.27) : Réponse indicielle du modèle et du procédé.

Les résultats obtenus dans la méthode de variable instrumental à observations retardées (V.I.O.R), nous amène à conclure comme suite :

L'erreur quadratique est plus élevée par rapport à celle des moindres carrés étendus (M.C.E), aussi le modèle est validé car l'intercorrélacion normalisée est inférieure à 0.15.

3.4 L'entrée est un échelon d'amplitude 10 et retardé de 100s :

On reprend le même exemple du système du premier ordre La forme récurrente du modèle discrétisé étant :

$$y(t + 1) = a_1 y(t) + b_1 u(t) + e(t)$$

Avec : $e(t)$ un bruit gaussien.

$u(t)$: échelon d'amplitude 10 et retardé de 100s

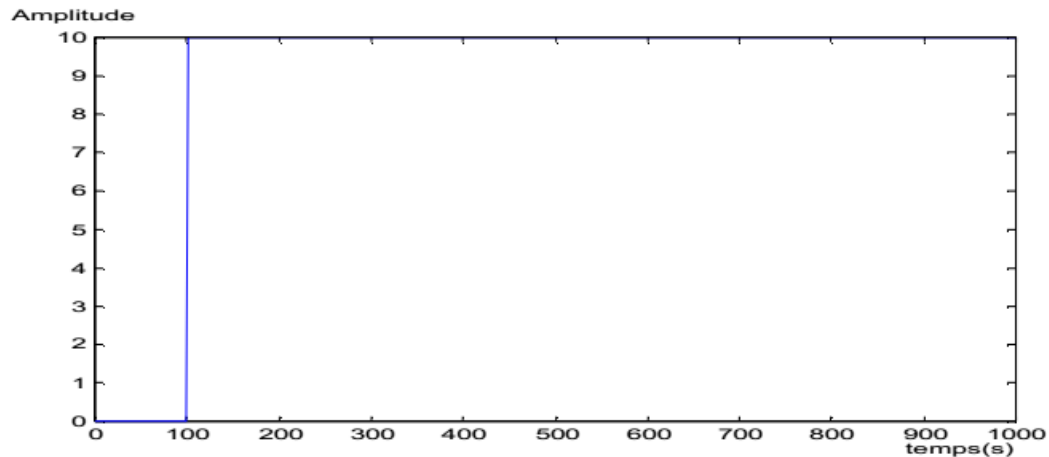


Figure (V.28) : Echelon retardé.

Tel que : $\theta = [a_1 \ b_1]$ est le vecteur des paramètres à identifier.

Les paramètres identifiés sont : $a_1 = 2.2$, $b_1 = -0.75504$

Les différentes courbes relevées :

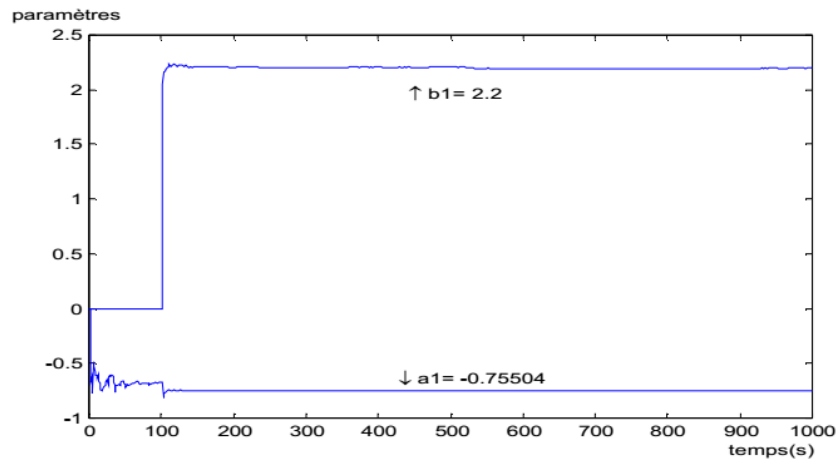


Figure (V.29) : Evolution des paramètres du modèle.

Erreur quadratique = 0.0507

Test de validation : blancheur de l'erreur

- Energie du l'erreur = Variance (erreur) = 0.0149
- Energie du procédé = Variance (procédé) = 737.6534
- Energie du modèle = Variance (modèle) = 734.6729

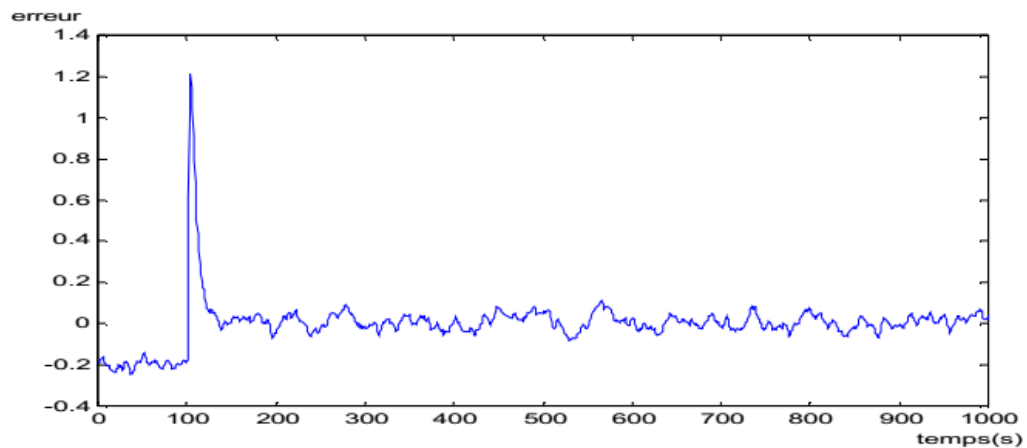


Figure (V.30) : Erreur de prédiction.

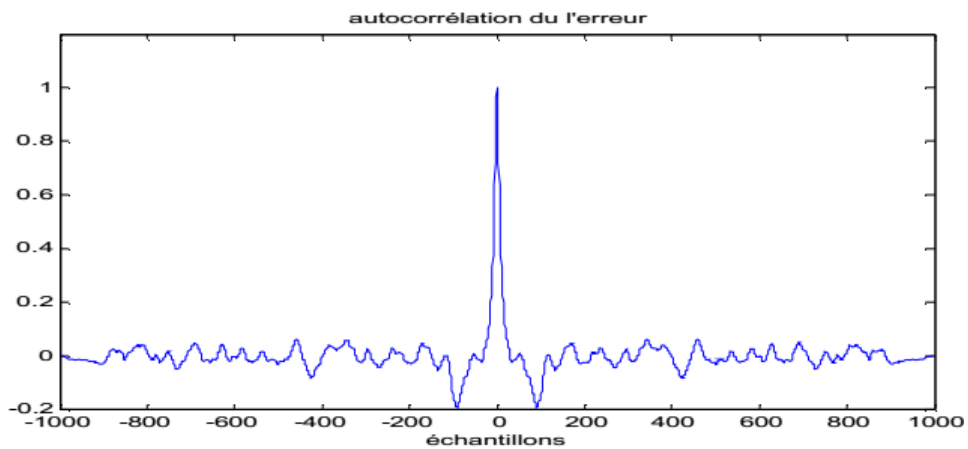


Figure (V.31) : Autocorrélation du l'erreur.

D'après la figure (V.31), on peut dire que ce modèle est validé, car l'autocorrélation du l'erreur de prédiction est proche du celle du bruit blanc.

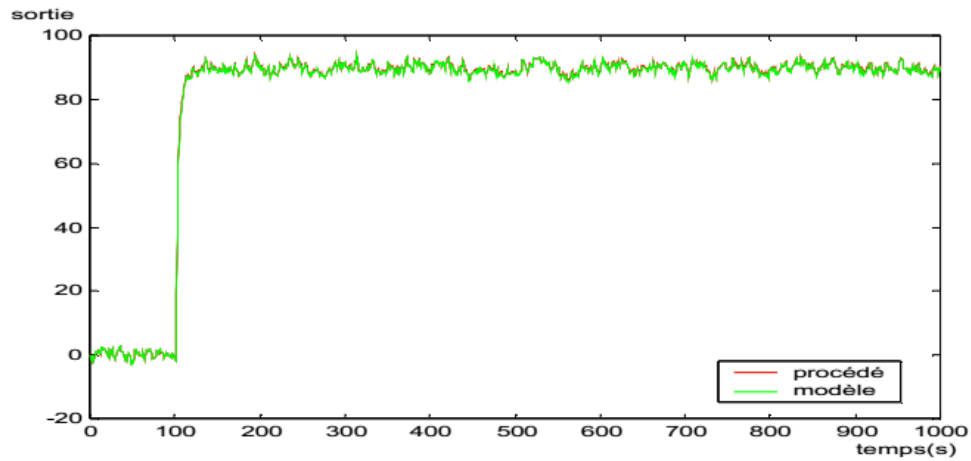


Figure (V.32) : Les sorties du système et du modèle.

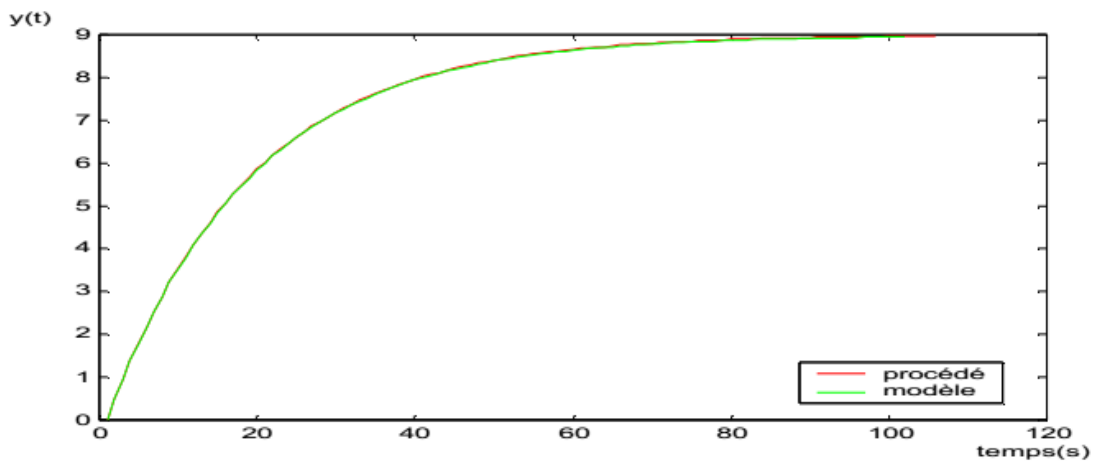


Figure (V.33) : Réponse indicielle du procédé et du modèle.

3.5 Influence de la période d'échantillonnage :

On reprend l'exemple du système de premier ordre qui est de la forme suivante :

$$G(p) = \frac{9}{1 + 6p}$$

Après la discrétisation du système continu, avec une période d'échantillonnage $T_e=0.1s$, on aura la fonction de transfert discrète tel que :

$$G(z) = \frac{0.1488}{z - 0.9835}$$

Qu'on peut mettre sous la forme suivante :

$$G(z^{-1}) = \frac{0.1488z^{-1}}{1 - 0.9835z^{-1}}$$

Soit la fonction de transfert discrète du modèle du système à identifier qui est donné par :

$$\hat{G}(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

En utilisant le programme des moindres carrés étendus (M.C.E) implémenté sous MATLAB, on relève les courbes suivantes :

Les différentes courbes relevées:

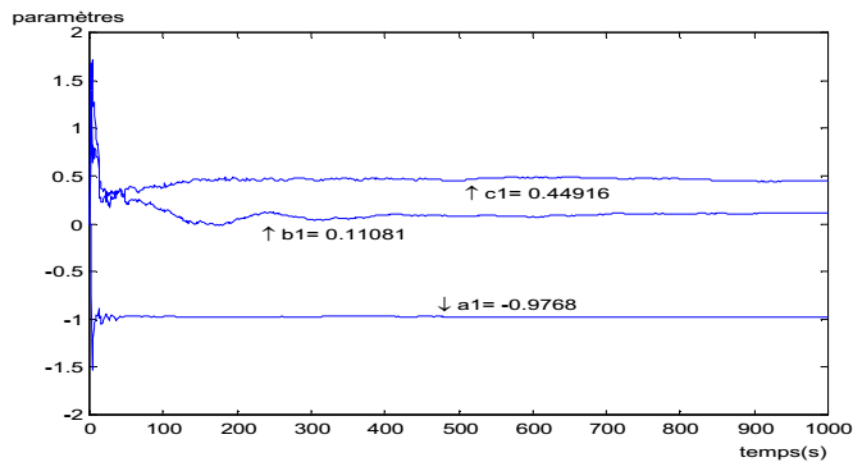


Figure (V.34) : Evolution des paramètres du modèle du 1^{er} ordre.

Erreur quadratique = 1.0931

Test de validation : blancheur de l'erreur

- Energie du l'erreur= Variance (erreur) = 0.8535
- Energie du procédé =Variance (procédé) = 34.8699
- Energie du modèle =Variance (modèle) = 30.4280

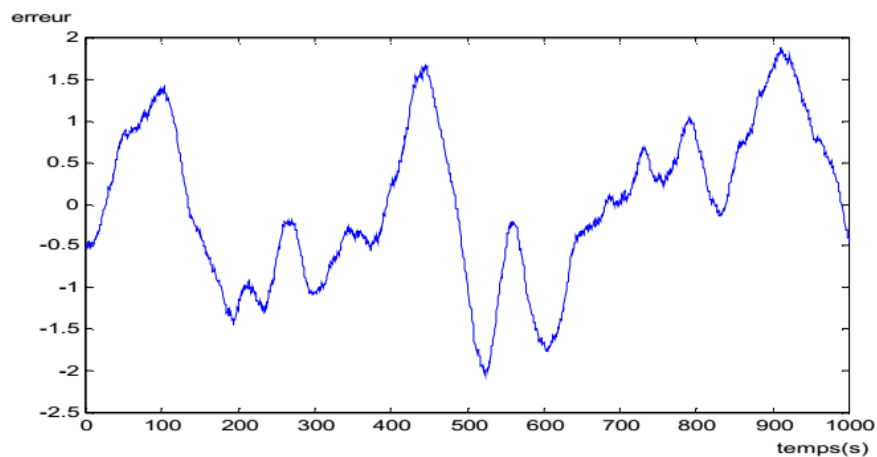


Figure (V.35) : Erreur de prédiction.

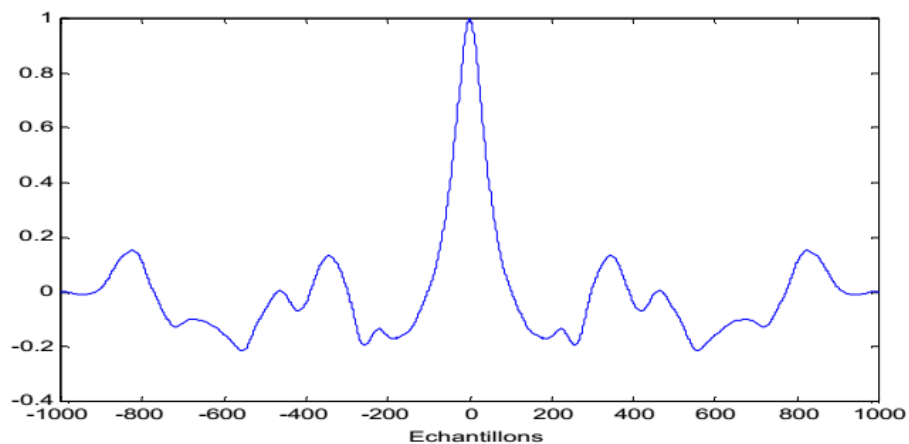


Figure (V.36) : Autocorrélation du l'erreur.

D'après la figure (V.36), on peut dire que ce modèle n'est pas validé, car l'autocorrélation du l'erreur de prédiction est différente du celle du bruit blanc.

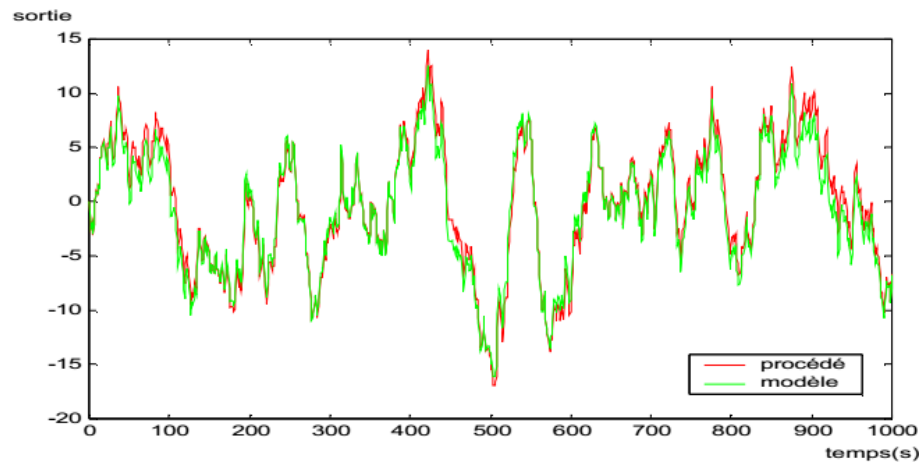


Figure (V.37) : Les sorties du système et du modèle.

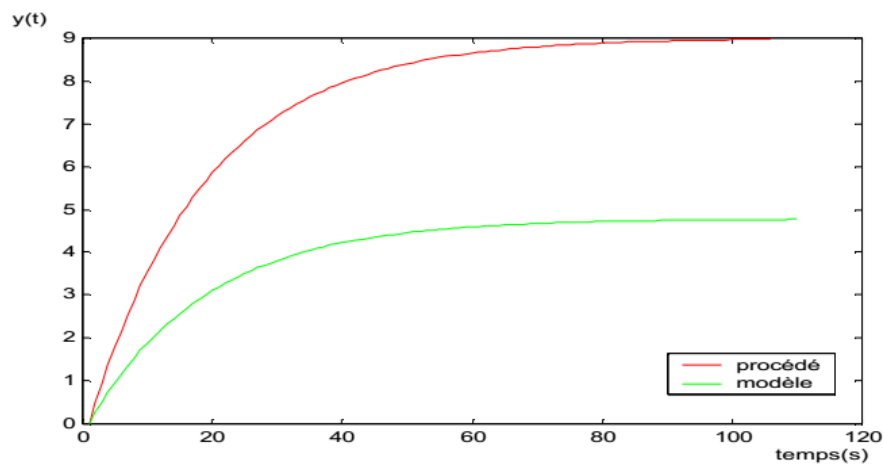


Figure (V.38) : Réponse indicielle du procédé et du modèle.

D'après la figure (V.38), on remarque que les réponses indicielles du modèle et du procédé sont différentes, cela est dû au mauvais choix de la période d'échantillonnage.

On peut conclure que le choix de la période d'échantillonnage est important, elle doit être choisie convenablement en respectant la condition du théorème de Shannon :

Cas du système du premier ordre : $\frac{T}{4} < T_e < T$ et dans notre cas T_e est comprise entre $1.5 < T_e < 6$.

3.6 Influence de nombre d'échantillons :

On reprend le même exemple du système de premier ordre discrétisé, pour cette fois ci on considère 100 échantillons :

$$G(z^{-1}) = \frac{2.277z^{-1}}{1 - 0.747z^{-1}}$$

En utilisant le programme des moindres carrés étendus (M.C.E) implémenté sous MATLAB, on relève les courbes suivantes :

Les différentes courbes relevées:

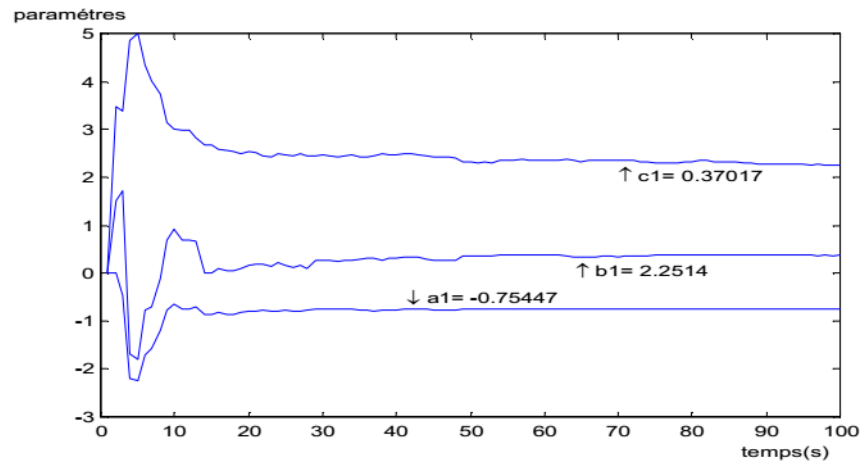


Figure (V.39) : Evolution des paramètres du modèle du 1^{er} ordre.

Erreur quadratique = 0.0060

Test de validation : blancheur de l'erreur

- Energie du l'erreur = Variance (erreur) = 0.0039
- Energie du l'erreur Variance (procédé) = 5.0413
- Energie du l'erreur Variance (modèle) = 4.8535

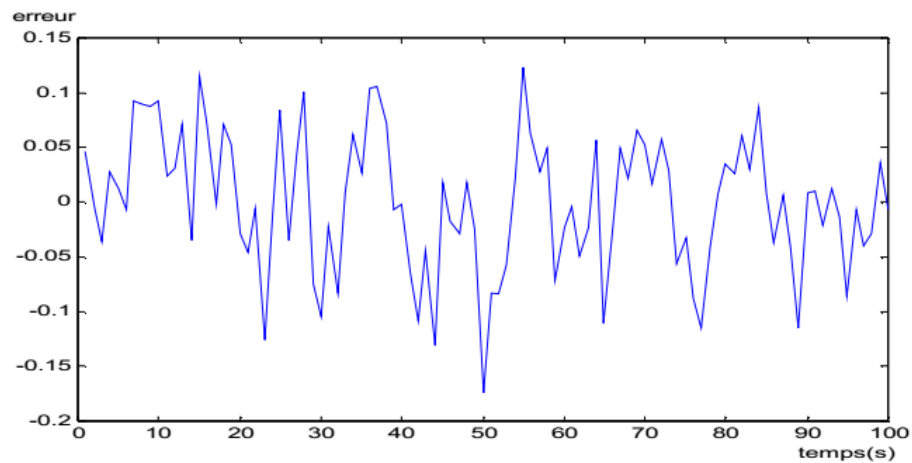


Figure (V.40) : Erreur de prédiction.

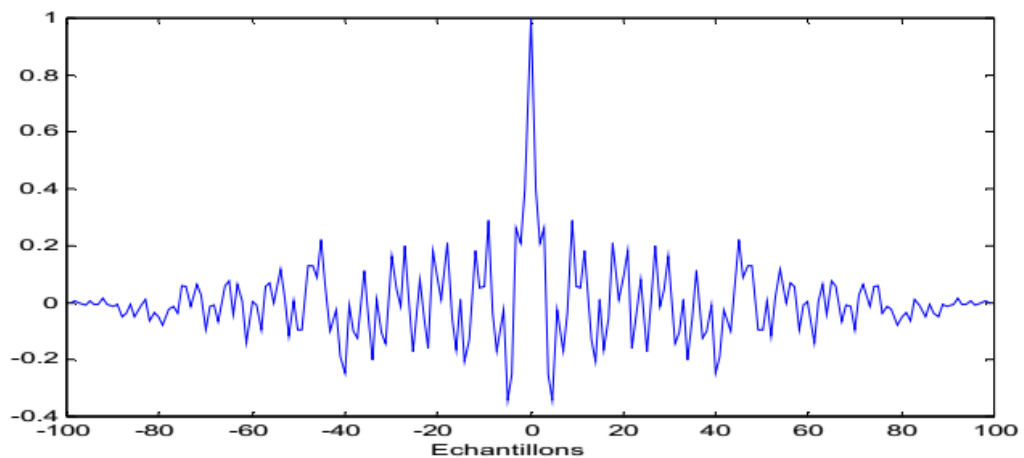


Figure (V.41) : Autocorrélation du l'erreur de prédiction.

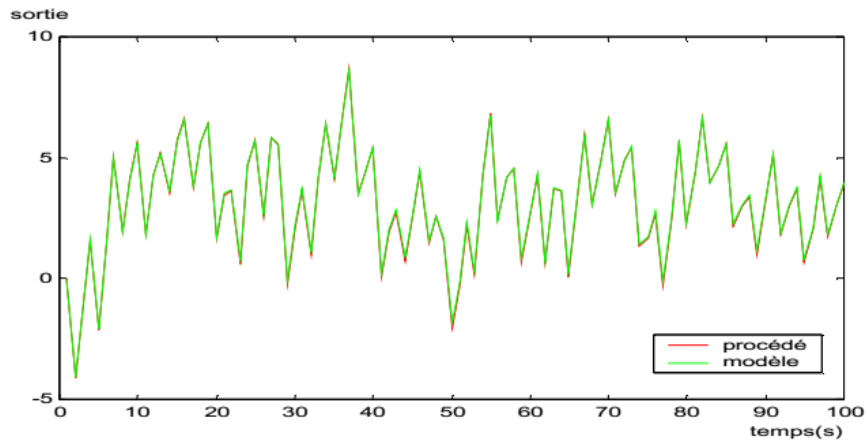


Figure (V.42) : Les sorties du système et du modèle.

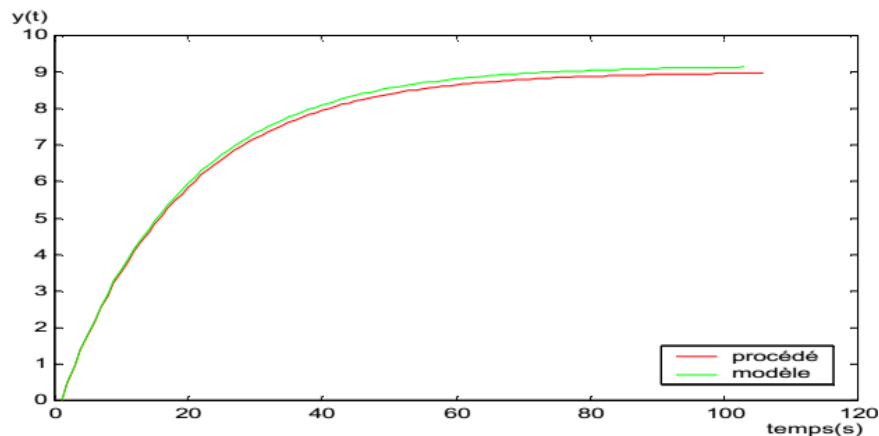


Figure (V.43) : Réponse indicielle du procédé et du modèle.

D'après les résultats obtenus, on constate que l'erreur quadratique pour le nombre d'échantillons 1000 est assez faible par rapport à l'erreur quadratique à 100 échantillons. Ce qui signifie que le nombre d'échantillons influe sur la qualité de l'estimation des paramètres.

Conclusion :

Après l'implémentation sous MATLAB des algorithmes de l'identification (M.C.R et M.C.E et V.I.O.R), on peut conclure ce qui suit :

- Comparant les deux entrées (S.B.P.A et échelon), on remarque que l'entrée S.B.P.A est plus fiable comparée à celle de l'échelon puisqu' elle nous donne une erreur quadratique plus faible.
- La méthode des M.C.E est plus performante que celle des M.C.R. Elle permet une meilleure convergence des paramètres (donne une erreur quadratique plus petite), cela est dû à la structure du modèle choisie (voir les courbes relevées en dessus).
- Si on compare la méthode des M.C.E à celle du V.I.O.R, on constate que cette dernière a une erreur quadratique plus élevée vu qu'elle ne prend pas en considération la modélisation des perturbations, ce qui signifie que la M.C.E est la meilleure.
- Quand le nombre de données utilisés pour l'identification augmente la qualité de l'estimation augmente.