

Chapitre IV : Identification des systèmes bruités

1. Introduction :

Dans ce chapitre, on va étudier l'effet des perturbations sur l'estimation des paramètres des modèles du procédé quand on utilise l'algorithme des moindres carrés récurrents ou non récurrent. Ces perturbations introduisent des erreurs qui s'appellent « biais des paramètres ». Il existe des méthodes appropriées d'identification récursive assurant asymptotiquement une estimation non biaisée des paramètres.

On distingue deux catégories de méthodes d'identification récursive.

- Méthodes basées sur le blanchissement de l'erreur de prédiction
- Méthodes d'identification basées sur la décorrélation du vecteur des observations et de l'erreur de prédiction.

2. Méthodes basées sur le blanchissement de l'erreur de prédiction :

Les méthodes d'identification entrent dans cette catégorie :

- Moindres carrés récurrents (M.C.R)
- Moindres carrés étendus (M.C.E).
- Maximum de vraisemblance récurrent (M.V.R).
- Erreur de sortie avec modèle de prédiction étendue (E.S.M.P.E).
- Moindres carrés généralisés (M.C.G).

2.1 Moindres carrés récurrents (M.C.R) :

La méthode des moindres carrés récurrents a été expliquée en détail dans le chapitre précédent.

2.2 Moindres carrés étendus (M.C.E) :

Cette méthode a été développée pour pouvoir identifier sans biais des modèles « procédé + perturbation » de la forme :

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})e(t) \quad (\text{IV.1})$$

Avec :

$C(q^{-1})$: polynôme bruit.

$e(t)$: bruit blanc gaussien.

Le problème est d'identifier le modèle du procédé et du bruit, afin de pouvoir obtenir une erreur de prédiction blanche.

Principe de la méthode :

Soit le modèle du procédé décrit par l'équation :

$$y(t+1) = -\sum_{i=1}^{n_A} a_i y(t+1-i) + \sum_{i=1}^{n_B} b_i u(t+1-i) + \sum_{i=1}^{n_C} c_i e(t+1-i) + e(t+1)$$

En supposant que les paramètres sont connus, la sortie du modèle est :

$$\hat{y}(t+1) = -\sum_{i=1}^{n_A} a_i y(t+1-i) + \sum_{i=1}^{n_B} b_i u(t+1-i) + \sum_{i=1}^{n_C} c_i e(t+1-i) \quad (\text{IV.2})$$

L'erreur de prédiction est donnée par :

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1) = e(t+1)$$

Donc, l'équation (IV.2) devient :

$$\hat{y}(t+1) = -\sum_{i=1}^{n_A} a_i y(t+1-i) + \sum_{i=1}^{n_B} b_i u(t+1-i) + \sum_{i=1}^{n_C} c_i \varepsilon(t+1-i) \quad (\text{IV.3})$$

Dans le cas des paramètres inconnus, la sortie modèle sera donnée par l'équation (IV.3), où on remplace les valeurs réelles des paramètres par leurs estimations, on aura donc :

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+1) &= \sum_{i=1}^{n_A} \hat{a}_i(t) y(t+1-i) + \sum_{i=1}^{n_B} \hat{b}_i(t) u(t+1-i) + \sum_{i=1}^{n_C} c_i(t) \varepsilon(t+1-i) \\ &= \hat{\theta}(t) \phi^T(t) \end{aligned}$$

Avec :

$$\phi^T(t) = [-y(t) \dots y(t+1-n_A), u(t) \dots u(t+1-n_B), \varepsilon(t) \dots \varepsilon(t+1-n_C)]$$

$$\hat{\theta}(t) = [\hat{a}_1(t) \dots \hat{a}_{n_A}(t), \hat{b}_1(t) \dots \hat{b}_{n_B}(t), \hat{c}_1(t) \dots \hat{c}_{n_C}(t)]$$

La sortie prédite par le modèle à l'instant $t+1$ est :

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+1) &= \sum_{i=1}^{n_A} \hat{a}_i(t+1) y(t+1-i) + \sum_{i=1}^{n_B} \hat{b}_i(t+1) u(t+1-i) + \sum_{i=1}^{n_C} c_i(t+1) \varepsilon(t+1-i) \\ &= \hat{\theta}(t+1)^T \phi(t) \end{aligned}$$

L'erreur de prédiction à l'instant $t+1$ est :

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1)$$

L'erreur de prédiction « a priori » est :

$$\varepsilon^0(t+1) = y(t+1) - \hat{y}^0(t+1)$$

En utilisant l'algorithme d'adaptation paramétrique donné par les équations (III.30), (III.32) et (III.34).

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t) \phi(t) \varepsilon(t+1)$$

$$\varepsilon(t+1) = \frac{\varepsilon^0(t+1)}{1 + \phi(t)^T F(t) \phi(t)}$$

$$F(t+1)^{-1} = \lambda_1(t) F(t)^{-1} + \lambda_2 \phi(t) \phi(t)^T$$

En présence du bruit et avec un gain décroissant asymptotiquement, $\varepsilon(t)$ tend d'une façon asymptotique vers un bruit blanc, ce qui garantit une estimation non biaisée des paramètres a_i et b_i .

2.3 Maximum de vraisemblance récursif (M.V.S) :

C'est une amélioration de la méthode des moindres carrés étendus (M.C.E). en effet au lieu d'utiliser dans l'algorithme d'adaptation paramétrique $\phi(t)$, on le filtre par $1/\hat{C}(t, q^{-1})$, avec $\hat{C}(t, q^{-1})$ une estimation à l'instant t de $C(q^{-1})$.

La sortie prédite à l'instant $t + 1$ est :

$$\hat{y}(t + 1) = \hat{\theta}(t + 1)^T \phi(t)$$

Les erreurs de prédiction correspondantes sont données par :

$$\varepsilon(t + 1) = y(t + 1) - \hat{y}(t + 1)$$

L'estimation du polynôme $C(q^{-1})$ à l'instant t s'écrit :

$$\hat{C}(t, q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n_c} \hat{c}_i(t) q^{-i}$$

Le vecteur d'observations $\phi(t)$ est défini par :

$$\phi^T(t) = \frac{1}{\hat{C}(t, q^{-1})} [-y(t) \dots -y(t + 1 - n_A), u(t) \dots u(t + 1 - n_B), \varepsilon(t) \dots \varepsilon(t + 1 - n_C)] \quad (\text{IV.4})$$

Qui correspond au filtrage des composantes de $\phi(t)$ par $\frac{1}{\hat{C}(t, q^{-1})}$

L'algorithme est donné par (III.32), (III.35) et (III.36) où $\phi(t)$ est donné par l'équation (IV.4).

Dans le cas général :

$$\hat{\theta}(t) = [\hat{a}_1(t) \dots \hat{a}_{n_A}(t), \hat{b}_1(t) \dots \hat{b}_{n_B}(t), \hat{c}_1(t) \dots \hat{c}_{n_C}(t)]$$

$$\phi^T(t) = \frac{1}{\hat{C}(t, q^{-1})} [-y(t) \dots y(t + 1 - n_A), u(t) \dots u(t + 1 - n_B), \varepsilon(t) \dots \varepsilon(t + 1 - n_C)]$$

2.4 Erreur de sortie avec modèle de prédiction étendu (E.S.M.P.E) :

Il s'agit d'une extension de la méthode d'erreur de sortie. Soit le modèle du « procédé + perturbation » donné par l'équation suivante :

$$y(t + 1) = -a_1 y(t) + b_1 u(t) + c_1 \varepsilon(t) + \varepsilon(t + 1)$$

Le prédicteur ajustable « a priori » des M.C.E est donné par l'équation :

$$\hat{y}^0(t + 1) = -\hat{a}_1 y(t) + \hat{b}_1 u(t) + \hat{c}_1 \varepsilon(t) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t)$$

Rajoutant et en retranchant le terme $\pm \hat{a}_1(t) \hat{y}(t)$

$$\hat{y}^0(t + 1) = -\hat{a}_1 y(t) + \hat{b}_1 u(t) + \hat{c}_1 \varepsilon(t) \pm \hat{a}_1(t) \hat{y}(t) \quad (\text{IV.5})$$

et en regroupant différemment les termes de l'équation (III.5) on obtient la structure de prédiction ajustable « a priori » utilisée dans l'E.S.M.P.E

$$\hat{y}^0(t + 1) = -\hat{a}_1(t) y(t) + \hat{b}_1(t) u(t) + \hat{h}_1(t) \varepsilon(t) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t)$$

Où :

$$\hat{h}_1(t) = \hat{c}_1(t) - \hat{a}_1(t) ;$$

$$\hat{\theta}(t)^T = [\hat{a}_1(t), \hat{b}_1(t), \hat{h}_1(t)] ;$$

$$\phi(t)^T = [-\hat{y}(t), u(t), \varepsilon(t)]$$

Le prédicteur ajustable « a posteriori » est donné par :

$$\hat{y}(t + 1) = \hat{\theta}(t + 1) \phi(t)$$

Et les erreurs de prédiction sont données par :

$$\varepsilon^0(t+1) = y(t+1) - \hat{y}^0(t+1)$$

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1)$$

L'algorithme d'adaptation paramétrique est celui donné par les équations (III.32), (III.35) et (III.36). Dans le cas général :

$$\hat{\theta}(t)^T = [\hat{a}_1(t) \dots \hat{a}_{n_A}(t), \hat{b}_1(t) \dots \hat{b}_{n_B}(t), \hat{h}_1(t) \dots \hat{h}_{n_C}(t)]$$

$$\hat{\phi}(t)^T = [-\hat{y}(t) \dots -\hat{y}(t - n_A + 1), u(t) \dots u(t - n_B + 1), \varepsilon(t) \dots \varepsilon(t - n_C + 1)]$$

Comme pour les M.C.E, $\varepsilon(t)$ tend asymptotiquement vers un bruit blanc, garantissant ainsi une estimation non biaisée des paramètres de $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ (si l'entrée est suffisamment riche). Notons que les valeurs des coefficients de $C(q^{-1})$ s'obtiennent en utilisant la relation suivante : $c_i = h_i + a_i$

2.5 Moindres carrés généralisés (M.C.G) :

L'objectif de cette méthode est d'obtenir une erreur de prédiction « blanche » pour un modèle « procédé+ perturbation » ayant la structure suivante :

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + \frac{1}{C(q^{-1})}e(t) \quad (IV.6)$$

Le terme $C(q^{-1})e(t)$ du modèle ARMAX « auto-régressif à moyenne ajustée et entrée exogène » a été remplacé par $1/C(t, q^{-1})e(t)$. Nous présenterons cette méthode à l'aide d'un exemple.

Le modèle « procédé+ perturbation » est donné par l'équation suivante :

$$y(t+1) = -a_1y(t) + b_1u(t) + \frac{e(t+1)}{1+c_1q^{-1}}$$

Définissons :

$$\alpha(t+1) = (1 + a_1q^{-1})y(t+1) - b_1u(t) = \frac{e(t+1)}{1+c_1q^{-1}} \quad (IV.7)$$

On a alors la relation : $(1 + C_1q^{-1})\alpha(t+1) = e(t+1)$

$\alpha(t+1)$: est un processus AR « autor-égressif ».

En supposant les paramètres connus, nous pouvons construire un prédicteur assurant une erreur de prédiction blanche :

$$y(t+1) = -a_1y(t) + b_1u(t) - c_1\alpha(t) \quad (IV.8)$$

En effet :

$$y(t+1) - \hat{y}(t+1) = \frac{e(t+1)}{1+c_1q^{-1}} = e(t+1)$$

Dans le cas des paramètres inconnus, le prédicteur s'obtient en remplaçant les paramètres connus dans l'équation (IV.5) par leurs estimations.

Le prédicteur ajustable « a priori » sera donné par :

$$\hat{y}^0(t+1) = \hat{a}_1(t)y(t) + \hat{b}_1(t)u(t) + \hat{c}_1(t)\alpha(t) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t) \quad (IV.9)$$

Où :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(t)^T &= [\hat{a}_1(t), \hat{b}_1(t), \hat{c}_1(t)] \\ \phi(t)^T &= [y(t), u(t), \alpha(t)]\end{aligned}\quad (IV.10)$$

La quantité $\alpha(t)$ sera estimée à l'aide de l'équation (IV.7) dans laquelle on remplace les valeurs inconnues des paramètres par leurs estimations :

$$\alpha(t) = \hat{A}(t, q^{-1})y(t) - q^{-d}\hat{B}(t, q^{-1})u(t) = (1 + \hat{a}_1(t)q^{-1}) - \hat{b}_1(t)u(t-1)$$

L'erreur de prédiction « a priori » est donnée par :

$$e^0(t+1) = y(t+1) - \hat{y}^0(t+1) \quad (IV.11)$$

L'équation du prédictor ajustable donnée dans l'équation (IV.9) ayant la formulation permettant l'utilisation de l'algorithme des moindres carrés, on va utiliser, comme pour les M.C.E, l'algorithme d'adaptation paramétrique donné par les équations (III.32), (III.35) et (III.36). dans ce cas $\phi(t)$ est donné par l'équation (IV.10) et $e^0(t+1)$ par l'équation (IV.11).

Dans le cas général:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(t)^T &= [\hat{a}_1(t) \dots \hat{a}_{n_A}(t), \hat{b}_1(t) \dots \hat{b}_{n_B}(t), \hat{c}_1(t) \dots \hat{c}_{n_C}(t)]; \\ \phi(t)^T &= [-y(t) \dots -y(t-n_A+1), u(t) \dots u(t-n_B+1), -\alpha(t) \dots -\alpha(t-n_C+1)]\end{aligned}$$

3. Méthodes d'identification basées sur la décorrélation du vecteur des observations du vecteur des observations et de l'erreur de prédiction (Type II) :

Les méthodes d'identification récursive suivantes entrent dans cette catégorie :

- Variable instrumentale à observations retardées (VIOR).
- Variable instrumentale à modèle auxiliaire (VIMA).
- Erreur de sortie à compensateur fixe (ESCF)
- Erreur de sortie à compensateur ajustable (ESCA)

3.1 Variable instrumentale à observations retardées :

L'objectif est de trouver un nouveau vecteur des observations qui soit fortement corrélé avec les variables non bruitées mais non corrélé avec le bruit pour pouvoir obtenir $E\{y(t), \varepsilon(t+1)\} = 0$

Exemple :

Soit le modèle « procédé+perturbation » :

$$y(t+1) = -a_1y(t) + b_1u(t) - c_1e(t) + e(t+1) \quad (IV.12)$$

Considérons le prédictor ajustable des moindres carrés récursifs :

$$\hat{y}^0(t+1) = -\hat{a}_1(t)y(t) + \hat{b}_1(t)u(t) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t) \quad (IV.13)$$

Où :

$$\hat{\theta}(t)^T = [\hat{a}_1(t), \hat{b}_1(t)], \phi(t)^T = [-y(t), u(t)] \quad (IV.14)$$

Et respectivement :

$$\hat{y}(t+1) = \hat{\theta}(t+1)^T \phi(t) \quad (\text{IV.15})$$

L'erreur de prédiction « a posteriori » à l'expression :

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{\theta}(t+1)^T \phi(t) = [\theta - \hat{\theta}(t+1)]^T \phi(t) + c_1 e(t) + e(t+1) \quad (\text{IV.16})$$

En tenant compte de :

$$y(t+1) = \theta^T \phi(t) + c_1 e(t) + e(t+1) \quad (\text{IV.17})$$

Où : $\theta^T = [a_1, b_1]$

Evaluons maintenant $E\{\phi(t), \varepsilon(t+1)\}$ pour $\hat{\theta} = \theta$:

$$E\{\phi(t), \varepsilon(t+1)\}^T = [-E\{y(t), \varepsilon(t+1)\}, 0] \neq 0 \quad (\text{IV.18})$$

La deuxième composante est nulle, car $u(t)$ est indépendant de $e(t)$ et $e(t+1)$. Le biais va être provoqué par :

$$E\{y(t), \varepsilon(t+1)\} \approx c_1 E\{e^2(t)\} = c_1 \sigma^2$$

Car $y(t)$ et $\varepsilon(t+1)$ contiennent un terme en $e(t)$. Remplaçant maintenant dans le vecteur des observations utilisées par les M.C.R. ($\phi(t) = \varphi(t)$), la première composante $-y(t)$ par sa valeur décalée d'un pas. On crée ainsi une « variable instrumentale ». Le nouveau vecteur des observations sera :

$$\phi(t)^T = \varphi_{IV}(t)^T [-y(t-1), u(t)] \quad (\text{IV.19})$$

En utilisant l'équation (IV.12) décalée de deux pas, on observe que l'expression de $y(t-1)$ contiendra des termes en $e(t-1)$ et $e(t-2)$, ce qui aura pour conséquence :

$$E\{y(t-1), \varepsilon(t+1)\} = 0 \Rightarrow E\{\phi(t)^T, \varepsilon(t+1)\} = 0 \quad (\text{IV.20})$$

C'est-à-dire c'est ce que nous recherchons pour obtenir des estimations paramétriques non biaisées. L'algorithme d'adaptation paramétrique (A.A.P) reste celui des M.C.R, dans le quel on utilise le vecteur instrumental $\phi(t)$ donné par l'équation (IV.19).

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t)\phi(t)\varepsilon(t+1) \quad (\text{IV.21})$$

$$\varepsilon(t+1) = \frac{\varepsilon^0(t+1)}{1 + \phi(t)^T F(t)\phi(t)} \quad (\text{IV.22})$$

$$F(t+1)^{-1} = \lambda_1 F(t)^{-1} + \lambda_2 \phi(t)\phi(t)^T \quad (\text{IV.23})$$

Dans le cas général, le vecteur instrumental $\phi(t)$ est donné par :

$$\phi(t)^T = \varphi_{IV}(t)^T = [-y(t-n_C), -y(t-n_C-1) \dots -y(t-n_C-n_A+1), u(t), u(t-1) \dots u(t-n_B+1)] \quad (\text{IV.24})$$

Où : le retard des observations n_C doit satisfaire la condition :

$$n_C \geq \deg C(q^{-1}) \quad (\text{IV.25})$$

afin d'obtenir la décorrélation souhaitée entre les observations et l'erreur de prédiction.

3.2 Variable instrumentale à modèle auxiliaire :

L'objectif est le même que pour la variable instrumentale à observations retardées. Le modèle « procédé + perturbation » considéré dans ce cas est celui de la structure S_2 :

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + w'(t) \quad (\text{IV.26})$$

Où :

$$w'(t+1) = A(q^{-1})w(t) \quad (\text{IV.27})$$

$w(t)$ est une perturbation quelconque, indépendante de $u(t)$, à valeur moyenne nulle et variance finie.

L'objectif final est d'obtenir des estimations non biaisées des coefficients de $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ sans prendre en compte une modélisation de la perturbation.

Exemple :

$$y(t+1) = -a_1y(t) + b_1u(t) + w'(t+1) \quad (\text{IV.28})$$

Où $w'(t+1)$ est donné par l'équation (IV.27) avec $A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1}$.

Considérons le prédictor ajustable des moindres carrés récurrents :

$$\hat{y}^0(t+1) = -\hat{a}_1(t)y(t) + \hat{b}_1(t)u(t) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t) \quad (\text{IV.29})$$

Où :

$$\hat{\theta}(t)^T = [\hat{a}_1(t), \hat{b}_1(t)], \phi(t)^T = [-y(t), u(t)] \quad (\text{IV.30})$$

Et respectivement :

$$\hat{y}(t+1) = \hat{\theta}(t+1)^T \phi(t) \quad (\text{IV.31})$$

L'erreur de prédiction étant définies par :

$$\begin{aligned} \varepsilon^0(t+1) &= y(t+1) - \hat{y}^0(t+1) \\ \varepsilon(t+1) &= y(t+1) - \hat{y}(t+1) \end{aligned} \quad (\text{IV.32})$$

Définissons un modèle de prédiction auxiliaire qui va engendrer la variable instrumentale :

$$y_{IV}(t) = \hat{a}_1(t)y_{IV}(t-1) + \hat{b}_1u(t-1) \quad (\text{IV.33})$$

Le nouveau vecteur des paramètres est définie par :

$$\phi(t)^T = \varphi_{IV}(t)^T = [y_{IV}(t), u(t)] \quad (\text{IV.34})$$

On remplace donc $y(t)$, $y(t-1)$, ... par $y_{IV}(t)$, $y_{IV}(t-1)$, ...

Dans le cas général, le vecteur des observation a la structure :

$$\phi(t)^T = \varphi_{IV}(t)^T = [y_{IV}(t), y_{IV}(t-1), u(t), u(t-1)] \quad (\text{IV.35})$$

Et la variable instrumentale y_{IV} est engendrée par le modèle auxiliaire :

$$\hat{A}(t, q^{-1})y_{IV}(t) = q^{-d}\hat{B}(t, q^{-1})u(t) \quad (\text{IV.36})$$

Où :

$$\begin{aligned} \hat{A}(t, q^{-1}) &= 1 + \hat{a}_1q^{-1} + \dots \\ \hat{B}(t, q^{-1}) &= \hat{b}_1q^{-1} + \hat{b}_2q^{-2} + \dots \end{aligned} \quad (\text{IV.37})$$

L'algorithme d'adaptation paramétrique reste celui des M.C.R. donné par l'équation (IV.21), (IV.22) et (IV.23). Dans le quel $\phi(t)$ est donné par l'équation (IV.35).

3.3 Erreur de sortie à compensateur fixe :

Le « modèle + perturbation » est celui donné par les équations (IV.26) et (IV.27) et respectivement pour l'exemple du premier ordre par l'équation (IV.28). L'idée sous-jacente à cette méthode est l'observation qu'en absence des perturbations, la sortie prédite par le prédictor des M.C.R. $\hat{y}(t+1)$ tend vers $y(t+1)$. Dans ces conditions, on peut remplacer $y(t)$ dans l'équation de prédictor par $\hat{y}(t)$.

Exemple :

Considérons le prédictor ajustable M.C.R. pour le modèle « procédé + perturbation » de l'équation (IV.28)

$$\hat{y}^0(t+1) = \hat{a}_1(t)\hat{y}(t) + \hat{b}_1(t)u(t) \quad (\text{IV.38})$$

et remplaçant dans l'équation (IV.28) $y(t)$ par $\hat{y}(t)$ (prédictor type « erreur de sortie »). Nous obtenons alors :

$$\hat{y}^0(t+1) = -\hat{a}_1(t)\hat{y}(t) + \hat{b}_1(t)u(t) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t) \quad (\text{IV.39})$$

Où :

$$\hat{\theta}(t)^T = [\hat{a}_1(t), \hat{b}_1(t)], \phi(t)^T = [-\hat{y}(t), u(t)] \quad (\text{IV.40})$$

et

$$\hat{y}(t+1) = \hat{\theta}(t+1)^T \phi(t) \Rightarrow \hat{y}(t) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t-1) \quad (\text{IV.41})$$

représente la nouvelle prédiction « a posteriori ».

Dans le cas général, le vecteur des observations utilisé dans le prédictor et dans l'algorithme d'adaptation paramétrique est de la forme :

$$\phi(t)^T = [-\hat{y}(t), -\hat{y}(t-1) \dots -\hat{y}(t-n_A+1), u(t) \dots u(t-n_B+1)] \quad (\text{IV.42})$$

L'erreur de prédiction étant définies par :

$$\begin{aligned} \varepsilon^0(t+1) &= y(t+1) - \hat{y}^0(t+1) \\ \varepsilon(t+1) &= y(t+1) - \hat{y}(t+1) \end{aligned} \quad (\text{IV.43})$$

On définit aussi une erreur d'adaptation (v) obtenue par filtrage de l'erreur de prédiction :

$$\begin{aligned} v(t+1) &= D(q^{-1})\varepsilon(t+1) \\ D(q^{-1}) &= 1 + d_1 q^{-1} + \dots + d_{n_D} q^{-n_D} \end{aligned} \quad (\text{IV.44})$$

$$v^0(t+1) = \varepsilon^0(t+1) + \sum_{i=1}^{n_D} d_i \varepsilon(t+1-i) \quad (\text{IV.45})$$

L'algorithme d'adaptation paramétrique est de type M.C.R, dans le quel on utilise $\phi(t)$, donné par l'équation (IV.40) (respectivement (IV.48)) et on remplace $\varepsilon(t+1)$ par l'erreur d'adaptation $v(t+1)$.

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t)\phi(t)v(t+1) \quad (\text{IV.46})$$

$$v(t+1) = \frac{v^0(t+1)}{1 + \phi(t)^T F(t)\phi(t)} \quad (\text{IV.47})$$

$$F(t+1)^{-1} = \lambda_1 F(t)^{-1} + \lambda_2 \phi(t)\phi(t)^T \quad (\text{IV.48})$$

C'est une méthode qui assure donc une identification non biaisée des coefficients $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$, sans modélisation de la perturbation.

3.4 Erreur de sortie à compensateur ajustable :

Il s'agit d'une modification de la méthode de l'erreur de sortie à compensateur fixe. Dans cette méthode, on identifie simultanément les paramètres du procédé et du compensateur.

Les équations des prédicteurs et des erreurs de prédictions restent les mêmes que pour la méthode d'erreur de sortie à compensateur fixe (et sont données par les équations (IV.39), (IV.40), (IV.41) et (IV.43))

Le changement intervient au niveau de la génération de l'erreur d'adaptation. On remplace les équations (IV.44) et (IV.45) par :

$$v(t+1) = \widehat{D}(t+1, q^{-1})\varepsilon(t+1) \quad (\text{IV.49})$$

$$\widehat{D}(t, q^{-1}) = \sum_{i=1}^{n_D} \hat{d}_i q^{-i} ; n_D = n_A \quad (\text{IV.50})$$

$$v^0(t+1) = \varepsilon^0(t+1) + \sum_{i=1}^{n_D} \hat{d}_i \varepsilon(t+1-i) \quad (\text{IV.51})$$

Les nouveaux vecteurs des paramètres ajustables et des observations pour l'exemple du premier ordre considéré seront :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t)^T &= [\hat{a}_1(t), \hat{b}_1(t), \hat{d}_1(t)] \\ \phi(t)^T &= [-\hat{y}(t), u(t), -\varepsilon(t)] \end{aligned} \quad (\text{IV.52})$$

Dans le cas général:

$$\hat{\theta}(t)^T = [\hat{a}_1(t) \dots \hat{a}_{n_A}(t), \hat{b}_1(t) \dots \hat{b}_{n_B}(t), \hat{d}_1(t) \dots \hat{d}_{n_D}(t)] \quad (\text{IV.53})$$

$$\phi(t)^T = [-\hat{y}(t) \dots -\hat{y}(t-n_A+1), u(t) \dots u(t-n_B+1), -\varepsilon(t) \dots -\varepsilon(t-n_D+1)] \quad (\text{IV.54})$$

L'algorithme d'adaptation paramétrique reste celui donné par les équations (IV.46), (IV.47) et (IV.48) où maintenant $v^0(t+1)$, $\hat{\theta}(t)$, $\phi(t)$ sont donnés par les équations (IV.51), (IV.52) et (IV.54).

Notons que cette méthode conduit à une augmentation du nombre de paramètres à estimer par rapport à l'erreur de sortie à compensateur fixe. Elle ne doit être utilisée que dans le cas que la méthode à compensateur fixe diverge. A noter que cette méthode peut diverger si transitoirement $\widehat{D}(t, q^{-1})$ a des racines à l'extérieur du cercle unité.

4. validation des modèles :

4.1 validation des modèles identifiés avec les méthodes de type I :

Le principe de la méthode de validation est le suivant :

- si la structure « procédé+perturbation » choisie est correcte.
- si on a utilisé une méthode d'identification appropriée pour la structure choisie.

La validation des modèles identifiés avec les méthodes de type I se fait en testant si l'erreur de prédiction $\varepsilon(t)$ tend asymptotiquement vers un bruit blanc, ce qui implique

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\{\varepsilon(t)\varepsilon(t-i)\} = 0, i = 1, 2, 3, \dots, -1, -2, -3, \dots$$

4.1 validation des modèles identifiés avec les méthodes de type II :

Le principe de la méthode de validation est le suivant :

- si la perturbation est indépendante de l'entrée ($E\{w(t)u(t)\} = 0$).
- si la structure « procédé + perturbation » choisie est correcte.
- si on a utilisé une méthode d'identification appropriée pour la structure choisie.

La validation des modèles identifiés avec les méthodes de type II se fait en testant si

$$E[\varepsilon(t) \hat{y}(t-i)] \approx \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t) \hat{y}(t-1) = 0$$

Un modèle identifié acceptable doit vérifier la condition $|RN(i)| \leq 0.15$

Où : $i = 1, 2, 3, \dots, \max(n_A, n_B + d)$ et les $RN(i)$ sont des estimations des intercorrélations normalisées.

$$RN(i) = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t) \hat{y}(t-i) \right] / \left\{ \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t) \right] \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \hat{y}^2(t) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$