

Correction d'examen probabilités et statistiques

Exercice 0.1. (5 points) Soit $(A_k)_{k \in K}$ un système complet d'événements aléatoires dans Ω , c'est-à-dire une partition de l'univers Ω , si on a pour tout $k \in K$, A_k à de probabilités strictement positives, $P(A_k) > 0$ alors on peut écrire tout événement A :

$$P(A) = \sum_{k \in K} P(A/A_k)P(A_k). \quad \dots \dots \dots (1)$$

L'événement certain Ω peut être écrit comme:

$$\Omega = \bigcup_{k \in K} (A_k). \quad \dots \dots \dots$$

On a alors

$$A = A \cup \Omega = \Omega = A \cap \left(\bigcup_{k \in K} (A_k) \right) = \bigcup_{k \in K} (A \cap A_k). \quad \dots \dots \dots$$

Puisque les A_k sont disjoints, les $A \cap A_k$ ont également disjoints. Par conséquent, par la propriété d'additivité des probabilités, on a :

$$P(A) = \sum_{k \in K} P(A \cap A_k). \quad \dots \dots \dots$$

Par définition de la probabilité conditionnelle, si $P(A_k) > 0$, on a :

$$P(A \cap A_k) = P(A | A_k) \cdot P(A_k). \quad \dots \dots \dots$$

En remplaçant $P(A \cap A_k)$ dans la somme précédente, on obtient :

$$P(A) = \sum_{k \in K} P(A | A_k) \cdot P(A_k). \quad \dots \dots \dots$$

Exercice 0.2. (5 points) Le système fonctionne donc :

$$P(S) = P((A \cap B \cap D) \cup (A \cap C \cap D)) = 0,168 \quad \dots \dots \dots$$

$$P(A) \cdot P(B) \cdot P(D) + P(A) \cdot P(C) \cdot P(D) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdot P(D) = 0,168$$

$$0,5 \cdot t \cdot 0,4 + 0,5 \cdot (1 - t) \cdot 0,4 - (0,5 \cdot t \cdot (1 - t) \cdot 0,4) = 0,2t + 0,2 - 0,2t - 0,2t(1 - t)$$

Alors

$$0,2t^2 - 0,2t + 0,2 = 0,168 \quad \dots \dots \dots$$

On résout cette équation pour déterminer t :

$$\Delta = (0,2)^2 - 4(0,2)(0,032) = 0,0144$$

Donc

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-0,2) + \sqrt{0,0144}}{2(0,2)} = \frac{0,2 + 0,12}{0,4} = 0,8 \quad \dots \dots \dots$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-0,2) - \sqrt{0,0144}}{2(0,2)} = \frac{0,2 - 0,12}{0,4} = 0,2 \quad \dots \dots \dots$$

Donc $t = 0,8$ et $t = 0,2$.

$$\begin{aligned} P(\bar{C}/S) &= \frac{P(\bar{C} \cap S)}{P(S)} = \frac{P(\bar{C} \cap ((A \cap B \cap D) \cup (A \cap C \cap D)))}{P(S)} \\ &= \frac{P(\bar{C} \cap (A \cap B \cap D))}{P(S)} = \frac{P(\bar{C}) \cdot P(A) \cdot P(B) \cdot P(D)}{P(S)} \quad \dots \dots \dots \end{aligned}$$

- Pour $t = 0,8$

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,2 = 0,8 \quad \text{et} \quad P(\overline{C}/S) = 0,7619 \quad \dots \quad 0,75$$

- Pour $t = 0,2$

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,8 = 0,2 \quad \text{et} \quad P(\overline{C}/S) = 0,0476 \quad \dots \quad 0,75$$

Exercice 0.3. (5 points) Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p ($X \sim B(p)$) si :

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p. \quad \dots \quad 1$$

Une variable aléatoire Y suit une loi de Bernoulli de paramètre q ($Y \sim B(q)$) si :

$$P(Y = 1) = q, \quad P(Y = 0) = 1 - q. \quad \dots \quad 1$$

Considérons la somme :

$$S = X + Y.$$

La variable aléatoire S peut prendre les valeurs suivantes :

- $S = 0$ (les deux variables valent 0), $\dots \quad 0,5$
- $S = 1$ (l'une des variables vaut 1, l'autre vaut 0), $\dots \quad 0,5$
- $S = 2$ (les deux variables valent 1), $\dots \quad 0,5$

Calculons les probabilités associées aux différentes valeurs de S :

$P(S = 0)$:

$$P(S = 0) = P(X = 0 \text{ et } Y = 0) = P(X = 0) \cdot P(Y = 0) = (1 - p)(1 - q). \quad \dots \quad 0,5$$

$P(S = 1)$: Par indépendance :

$$P(S = 1) = P(X = 1, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) = p(1 - q) + (1 - p)q. \quad \dots \quad 0,5$$

$P(S = 2)$:

$$P(S = 2) = P(X = 1 \text{ et } Y = 1) = P(X = 1) \cdot P(Y = 1) = p \cdot q. \quad \dots \quad 0,5$$

Exercice 0.4. (5 points)

1. Détermination de la constante k

La condition pour une densité de probabilité est :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \quad \dots \quad 0,5$$

Et on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{\infty} k e^{-2\alpha x} (1 - e^{-\alpha x}) dx = 1.$$

Alors :

$$\int_0^{\infty} k e^{-2\alpha x} dx - \int_0^{\infty} k e^{-3\alpha x} dx = \frac{k}{2\alpha} - \frac{k}{3\alpha} = k \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{3\alpha} \right) = 1. \quad \dots \quad 0,5$$

Les intégrales sont calculées comme suit :

$$\int_0^{\infty} e^{-2\alpha x} dx = \frac{1}{2\alpha}, \quad \int_0^{\infty} e^{-3\alpha x} dx = \frac{1}{3\alpha}.$$

On trouve :

$$k \cdot \frac{1}{6\alpha} = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 6\alpha. \quad \dots \quad 1$$

2. Fonction de répartition $F(x)$

La fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Pour $x < 0$, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0. \quad (0,5)$$

Pour $x \geq 0$, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt + \int_0^x 6\alpha e^{-2\alpha t} (1 - e^{-\alpha t}) dt = 3(1 - e^{-2\alpha x}) - 2(1 - e^{-3\alpha x}).$$

Alors :

$$F(x) = 1 - 3e^{-2\alpha x} + 2e^{-3\alpha x}. \quad (1)$$

3. Calcul des probabilités pour $\alpha = 1$

Pour $\alpha = 1$, la densité devient :

$$f(x) = 6e^{-2x}(1 - e^{-x}), \quad x \geq 0.$$

(a) $P(-1 \leq X \leq 2.5)$

$$P(-1 \leq X \leq 2.5) = P(0 \leq X \leq 2.5) = F(2.5) - F(0) = F(2.5) = 1 - 3e^{-5} + 2e^{-7.5} = 0.981. \quad (0,5)$$

(b) $P(1.5 < X \leq 3.75)$

$$P(1.5 < X \leq 3.75) = F(3.75) - F(1.5) = (1 - 3e^{-7.5} + 2e^{-11.25}) - (1 - 3e^{-3} + 2e^{-4.5}) = 0.125. \quad (0,5)$$

Substituons les valeurs numériques pour obtenir le résultat.

(c) $P(X > 6)$

$$P(X > 6) = 1 - F(6).$$

On calcule :

$$F(6) = 1 - 3e^{-12} + 2e^{-18} = 1 - 99998 \approx 0. \quad (0,5)$$
