

Lois usuelles continues

GASMI Abdelkader

November 13, 2024

Variable aléatoire réelle continue

Certaines variables aléatoires interviennent souvent dans de nombreux processus naturels. Leur loi ont donc une importance particulière. Les lois continues les plus fréquentes sont:

Loi uniforme

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme si sa densité est constante sur un intervalle $[a, b]$ et on a :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } x \in [a, b]; \\ 0, & \text{si } x \notin [a, b]. \end{cases} \quad (1)$$

Et on écrit $X \sim \mathcal{U}([a, b])$

Fonction de répartition d'une Loi uniforme

La fonction de répartition de la variable $X \sim \mathcal{U}([a, b])$ est donnée par:

- ▶ Si $x < a$, on a:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^a 0 \cdot dx = 0$$

- ▶ Si $a \leq x < b$, on a:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^a 0 \cdot dx + \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{t}{b-a} \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

- ▶ Si $b \leq x$, on a:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^a 0 \cdot dx + \int_a^b \frac{1}{b-a} dt + \int_b^{+\infty} 0 \cdot dx = \frac{t}{b-a} \Big|_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

L'espérance mathématique d'une Loi uniforme

L'espérance mathématique de la variable $X \sim \mathcal{U}([a, b])$ est donnée par:

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^a x \cdot 0 \cdot dx + \int_a^b \frac{x}{b-a} dx + \int_b^{+\infty} x \cdot 0 \cdot dx \\ &= \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2} \\ &= \frac{2(b-a)}{b+a} \\ &= \frac{b+a}{2} \end{aligned}$$

Variance et écart-type d'une Loi uniforme

La Variance dde la variable $X \sim \mathcal{U}([a, b])$ est donnée par:

$$\begin{aligned}\text{Var}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx \\&= \int_{-\infty}^a (x - \frac{b+a}{2})^2 \cdot 0 \cdot dx + \int_a^b \frac{(x - \frac{b+a}{2})^2}{b-a} dx + \int_b^{+\infty} (x - \\&= \frac{1}{4(b-a)} \int_a^b (2x - b - a)^2 dx \\&= \frac{1}{24(b-a)} (2x - b - a)^3 \Big|_a^b = \frac{(b-a)^2}{12}\end{aligned}$$

Propriété

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[a, b]$ alors:

$$f(x) = \frac{d-c}{b-a}, \quad \text{si } [c, d] \subset [a, b]; \quad (2)$$

Exemple

Dans un bureau de poste, le temps de service X à un guichet suit une loi uniforme et prend entre 2 minutes et 10 minutes de temps.

- 1. Déterminer la fonction de densité de probabilité f de la loi de X .*
- 2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit compris entre trois et sept minutes ?*
- 3. Quelle est la probabilité qu'un client attende plus de huit minutes?*
- 4. Préciser le temps d'attente moyen.*

La variable X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[2, 10]$. Alors,

- *sa fonction de densité est une fonction constante sur $[2, 10]$ définie par:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10 - 2} = \frac{1}{8} = 0.125, & \text{si } x \in [2, 10]; \\ 0, & \text{si } x \notin [2, 10]. \end{cases} \quad (3)$$

Loi exponentielle

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit une Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité est donnée par:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0; \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Et on écrit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

Fonction de répartition d'une Loi exponentielle

La fonction de répartition de la variable $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ est donnée par:

► Si $x < 0$, on a:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx = 0$$

► Si $0 \leq x$, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \lambda \int_0^x e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

L'espérance mathématique d'une Loi exponentielle

L'espérance mathématique de la variable $X \sim \mathcal{U}([a, b])$ est donnée par:

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 \cdot dx + \lambda \int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[-xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^R \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Variance et écart-type d'une Loi exponentielle

La Variance dde la variable $X \sim \mathcal{U}([a, b])$ est donnée par:

$$\begin{aligned} \text{Var}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 (x - \frac{1}{\lambda})^2 \cdot 0 \cdot dx + \lambda \int_0^{+\infty} (x - \frac{1}{\lambda})^2 e^{-\lambda x} dx \end{aligned}$$

Après deux fois intégration par parties on trouve:

$$\text{Var}(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Loi normale

Definition

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbf{R}$ suit une Loi normale de paramètres (m, σ) si sa densité est donnée par:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (5)$$

Et on écrit $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$ où $m = E(X)$ et $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$