

Variables aléatoires réelles et continues

GASMI Abdelkader

November 6, 2024

Variable aléatoire réelle continue

Définition

On appelle variable aléatoire réelle et continue sur un ensemble fondamental Ω , une application $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, telle que pour tout intervalle I de $\mathbf{R}$ on a :

$$X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in I\} \in \mathcal{P}(\Omega), \quad (1)$$

c'est à dire que $X^{-1}(I)$ est un événement de Ω .

Définition

(Loi de probabilité d'une variable aléatoire continue) On définit la loi de probabilité d'une variable aléatoire continue par sa fonction de répartition, donnée par :

$$F(x) = P(X \leq x) = P(X^{-1}(]-\infty, x])) = P(\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\}) \quad (2)$$

Propriété

1. *La fonction de répartition F d'une variable aléatoire discrete réelle X est une fonction croissante et continue à droite.*
2. $0 \leq F(x) \leq 1$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Définition

Soit X une variable aléatoire absolument continue et F sa fonction de répartition. On dit que est absolument continue s'il existe une fonction f telle que:

1. *f est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$.*
2. *f est positive ou nulle sur $\mathbf{R}$ ($\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq 0$).*
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.$
4. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$

La fonction f s'appelle densité de X

Propriété

Soit X une variable aléatoire absolument continue et soient f sa densité et F sa fonction de répartition

1. $\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2$ on a:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

2. $\forall a \in \mathbf{R}$ on a:

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - \int_{-\infty}^a f(t)dt = \int_a^{+\infty} f(t)dt.$$

Remarque

De la propriété précédente, on peut remarquer que:

1. Si on a $a = b$ il result $P(X = a) = \int_a^a f(t)dt = 0$

2. On a aussi $P(X < a) = P(X \leq a) = F(a) = \int_{-\infty}^a f(t)dt.$

Exemple

Soit X une variable aléatoire continue de densité:

$$f(x) = \begin{cases} k(4x - 2x^2), & 0 < x < 2; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3)$$

Déterminer la valeur de k et calculer $P(X > 1)$?

f est une densité alors on a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^2 k(4x - 2x^2) dx + \int_2^{+\infty} 0 dx = 1 \\ &= k \int_0^2 (4x - 2x^2) dx = 1 \\ &= k \left(2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_0^2 = 1 \end{aligned}$$

D'où

$$k = \frac{3}{8}$$

Donc

$$P(X > 1k) = \int_1^{+\infty} f(x)dx = \frac{3}{8} \int_1^2 (4x - 2x^2)dx = \frac{1}{2}$$

Esperance mathématique d'une variable aléatoire continue

Définition

L'espérance mathématique d'une variable continue X est donné par la formule:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \quad (4)$$

à condition que cette intégrale converge absolument

Propriété

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X vérifie

1. $E(\alpha) = \alpha, \forall \alpha$ une constante de $\mathbf{R}$
2. $E(X + \alpha) = E(X) + \alpha, \forall \alpha$ une constante de $\mathbf{R}$
3. $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$

Exemple

Dans l'exemple précédent si on calcule l'espérance mathématique on trouve:

$$\begin{aligned} E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx &= \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx + \frac{3}{8} \int_0^2 x(4x - 2x^2) dx + \int_2^{+\infty} \\ &= \frac{3}{8} \int_0^2 (4x^2 - 2x^3) dx \\ &= \frac{3}{8} \left(\frac{4}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^4 \right) \Big|_0^2 = 1 \end{aligned}$$

Variance et écart-type d'une variable aléatoire continue

Définition

On appelle variance d'une variable aléatoire X la quantité donnée par la formule:

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx \quad (5)$$

à condition que cette intégrale converge absolument

Propriété

Les propriétés suivantes sont vérifiées

1. $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$
2. $\text{Var}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \text{Var}(X), \forall \alpha \text{ et } \beta \text{ des constantes de } \mathbf{R}$

Exemple

Dans l'exemple précédent si on calcule la variance on trouve:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 (x - 1)^2 \cdot 0 dx + \frac{3}{8} \int_0^2 (x - 1)^2 (4x - 2x^2) dx + \int_2^{+\infty} (x - 1)^2 \cdot 0 dx \\ &= \frac{3}{8} \int_0^2 (-2x^4 + 8x^3 - 10x^2 + 4x) dx \\ &= \frac{3}{8} \left(-\frac{2}{5} x^5 + 2x^4 - \frac{10}{3} x^3 + 4x^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Definition

Soit X une variable aléatoire réelle et $r \in \mathbf{N}^*$, on appelle le moment d'ordre r de X la quantité:

$$E(X^r) = \sum_k (x_k)^r P(X = x_k), \quad (6)$$

et le moment centré d'ordre r de X la quantité:

$$E(X - E(X))^r = \sum_k (x_k - E(X))^r P(X = x_k). \quad (7)$$

Remarque

La variance est le moment centré d'ordre 2.

Definition

L'écart type noté σ d'une variable aléatoire X est défini comme la racine de la sa variance:

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}. \quad (8)$$