

Variables aléatoires réelles discrètes

GASMI Abdelkader

December 22, 2024

Variables aléatoires discrètes usuelles

Certaines variables aléatoires interviennent souvent dans de nombreux processus naturels. Leur loi ont donc une importance particulière. Les lois discrètes les plus fréquentes sont:

Variables de Bernoulli

Définition

On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire a deux résultats $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. On peut interpréter l'une de ces deux résultats comme un succès noté par 1 et l'autre comme un échec noté par 0 ou inversement et on a :

$$\begin{cases} P(\{\omega_1\}) = p, & ; \\ P(\{\omega_2\}) = 1 - p, & . \end{cases} \quad (1)$$

Définition

On dit que la variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\{0, 1\}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$, notée $B(p)$, si :

$$\begin{cases} P(X = 1) = p, & ; \\ P(X = 0) = 1 - p, & . \end{cases} \quad (2)$$

Exemple

L'expérience qui consiste à jeter une pièce de monnaie équilibrée est une épreuve de Bernoulli. Soit X l'application de $\Omega = \{P, F\}$ dans $\{0, 1\}$ définie par: $X(P) = 1$ et $X(F) = 0$, X est une variable de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$

Variables binomiale

Définition

Si on répète n fois une On épreuve de Bernoulli de paramètre p dans des même conditions, on dit que l'application qui compte le nombre de succès obtenu dans cette épreuve suit une loi binimiale de paramètres n et p que l'on note souvent $\mathcal{B}(n, p)$. On a alors $X(\Omega = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ et on a:

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\} : P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \quad (3)$$

Exemple

L'expérience qui consiste à jeter 4 fois une pièce de monnaie équilibrée et on compte le nombre de pile obtenus. On suppose que X est le nombre de pile et qui correspond à un succès, alors X suit une loi de Bernoulli de parmètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{2}$ et on a:

- ▶ $P(X = 0) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = C_4^0 (\frac{1}{2})^0 (\frac{1}{2})^{4-0} = \frac{1}{16}$
- ▶ $P(X = 1) = C_4^1 (\frac{1}{2})^1 (\frac{1}{2})^{4-1} = \frac{1}{4}$
- ▶ $P(X = 2) = C_4^2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^{4-2} = \frac{3}{8}$
- ▶ $P(X = 2) = C_4^3 (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^{4-3} = \frac{1}{4}$
- ▶ $P(X = 4) = C_4^4 (\frac{1}{2})^4 (\frac{1}{2})^{4-4} = \frac{1}{16}$

Variables de Poisson

Définition

On appelle variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ une variable aléatoire discrète entière X avec $X(\Omega) = \mathbf{N}$ et dont la loi de probabilité est donnée par:

$$\forall k \in \mathbf{N} : P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (4)$$

Propriété

Soit X une variable binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ telles que $n \rightarrow \infty$ et $p \rightarrow 0$ de manière à ce que le produit np tend vers une limite finie λ . Alors la variable aléatoire X tend vers une variable de Poisson λ .

Variables géométrique

Definition

On appelle variable aléatoire géométrique de paramètre p une variable aléatoire discrète X avec $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et dont la loi de probabilité est donnée par:

$$\forall k \in \mathbf{N}^* : P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} \quad (5)$$

Exemple

On considère l'expérience qui consiste à jeter indéfiniment une pièce de monnaie équilibrée et soit p la probabilité d'obtenir pile, on a $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) / \omega_1 = \text{pile ou face}\}$. Soit X la variable aléatoire définie par:

$$\begin{aligned} X &: \Omega \rightarrow \mathbf{R} \\ \omega &\mapsto F(x) = \text{nombre de premier lancer donnant pile.} \end{aligned}$$

On a: $X(\Omega) = \mathbf{N}^$ et $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$*

Relations entre les principales lois

Propriété

- ▶ Si les variables X_i suivent une loi $B(p)$ et sont indépendantes, alors la variable $\sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi $B(n, p)$.
- ▶ Si les variables X_i suivent une loi $P(\lambda_i)$ et sont indépendantes, alors la variable $\sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi $P\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$.