

Variables aléatoires

GASMI Abdelkader

December 22, 2024

Variables aléatoires réelles discrètes

Définition

On appelle variable aléatoire réelle et discrète sur un ensemble fondamental Ω , tout fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ de Ω dans l'ensemble des nombres réels $\mathbf{R}$ des nombres réels telle que $X(\Omega)$ est fini ou infin dénombrable, et pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a:

$$X^{-1}(x) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\} \in \mathcal{P}(\Omega), \quad (1)$$

c'est à dire que $X^{-1}(x)$ est un événement de Ω .

Exemple

On considère l'épreuve qui consiste à jeter deux fois successives une pièce de monnaie équilibrée, on a l'ensemble fondamental de cette épreuve est donnée par

$$\Omega = \{(F, F), (F, P), (P, F), (P, P)\}, \quad (2)$$

Les probabilités des événement élémentaire de Ω sont donnée par:

$$\begin{aligned}P(\{(F, F)\}) &= P(\{(P, F)\}) = P(\{(P, P)\}) = P(\{(F, P)\}) \\&= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} = 0.25\end{aligned}$$

Soit X la variable aléatoire qui correspond à chaque élément de Ω le nombre des piles qui soit apparue. On a:

$$X((F, F)) = 0$$

$$X((P, F)) = 1$$

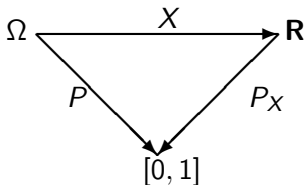
$$X((F, P)) = 1$$

$$X((P, P)) = 2$$

$$\text{et } X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

Définition

(Loi de probabilité d'une variable aléatoire) On définit la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle et discrète par



l'application $P_X = P \circ X^{-1}$,

$$P_X(X = x) = P(X^{-1}(x)) = P(\{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\}) \quad (3)$$

Exemple

on considère l'exemple précédent:

- ▶ $P_X(X = 0) = P(\{(F, F)\}) = \frac{1}{4}$
- ▶ $P_X(X = 1) = P(\{(P, F), (F, P)\}) = \frac{1}{2}$
- ▶ $P_X(X = 2) = P(\{(P, P)\}) = \frac{1}{4}$

Ces données peuvent se présenter sous la forme d'un tableau, de la manière suivante :

x_i	0	1	2
$P_X(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Fonction de répartition

Definition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est l'application de $\mathbf{R}$ dans $[0, 1]$ définie par:

$$\begin{aligned} F &: \mathbf{R} \rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto F(x) = P(X \leq x) \end{aligned}$$

Propriété

1. *La fonction de répartition F d'une variable aléatoire discrete réelle X est une fonction en escalier croissante et continue à droite.*
2. $F(x) = \sum_{x_k \leq x} P(X = x_k)$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Example

Dans l'exemple précédent

1. Si $x < 0$, $F(x) = 0$.
2. Si $0 \leq x < 1$, $F(x) = \frac{1}{4}$.
3. Si $1 \leq x < 2$, $F(x) = \frac{3}{4}$.
4. Si $2 \leq x$, $F(x) = 1$.

Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète

Définition

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X est donné par la formule:

$$E(X) = \sum_k x_k P(X = x_k) \quad (4)$$

à condition que cette série est convergente

Exemple

Dans l'exemple précédent si on calcule l'espérance mathématique on trouve:

$$E(X) = \sum_k x_k P(X = x_k) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

Propriété

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X vérifie

1. $E(\alpha) = \alpha, \forall \alpha$ une constante de $\mathbf{R}$
2. $E(X + \alpha) = E(X) + \alpha, \forall \alpha$ une constante de $\mathbf{R}$
3. $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$

Variance et écart-type d'une variable aléatoire discrete

Définition

On appelle variance d'une variable aléatoire X la quantité donnée par la formule:

$$\text{Var}(X) = \sum_k (x_k - E(X))^2 P(X = x_k) \quad (5)$$

à condition que cette série est convergente

Exemple

Dans l'exemple précédent si on calcule l'espérance mathématique on trouve:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \sum_k (x_k - E(X))^2 P(X = x_k) = \\ (0 - 1)^2 \cdot \frac{1}{4} + (1 - 1)^2 \cdot \frac{1}{2} + (2 - 1)^2 \cdot \frac{1}{4} &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Propriété

Les propriétés suivantes sont vérifiées

1. $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$
2. $\text{Var}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \text{Var}(X), \forall \alpha \text{ et } \beta \text{ des constantes de } \mathbf{R}$

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle et $r \in \mathbf{N}^$, on appelle le moment d'ordre r de X la quantité:*

$$E(X^r) = \sum_k (x_k)^r P(X = x_k), \quad (6)$$

et le moment centré d'ordre r de X la quantité:

$$E(X - E(X))^r = \sum_k (x_k - E(X))^r P(X = x_k). \quad (7)$$

Remarque

La variance est le moment centré d'ordre 2.

Définition

L'écart type noté σ d'une variable aléatoire X est défini comme la racine de la sa variance:

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}. \quad (8)$$