

TD N°02 : Théorie des graphes et algorithmes fondamentaux

Exercice II.1: (Question à choix multiples (QCM))

Choisir la bonne ou les bonnes réponses.

Q1) Parmi les éléments suivants, quels sont ceux absolument nécessaires pour définir un graphe orienté ?

- a) Sommets (ou points ou nœuds) b) Arêtes c) Arcs d) Boucles

Q2) Parmi les éléments suivants, quels sont ceux absolument nécessaires pour définir un graphe non orienté ?

- a) Sommets (ou points ou nœuds) b) Arêtes c) Arcs d) Boucles

Q3) Dans un graphe non orienté, on appelle chaîne une suite de sommets dans laquelle:

- a) Deux sommets consécutifs sont adjacents
b) Deux sommets consécutifs sont égaux
c) Deux cotés égaux sont adjacents
d) Deux sommets consécutifs sont parallèles

Q4) Un graphe non orienté G est :

- a) Une figure qui relève du spiritisme
b) Un ensemble de sommets reliés par des arêtes
c) Une démonstration partielle
d) Un ensemble d'arêtes reliées par des sommets

Q5) Deux sommets reliés par une arête sont dits :

- a) Colinéaires b) Parallèles c) Adjacents d) Républicains

Q6) Une arête est une boucle si :

- a) Elle est composée de 3 arêtes b) Elle est de degré 2
c) Elle est colinéaire d) Elle relie un sommet à lui-même

Q7) Un graphe est qualifié de complet si :

- a) Toutes ses arêtes sont colinéaires b) Il est composé de droites
b) Tous ses sommets sont deux à deux adjacents d) Il est orienté

Q8) La longueur d'une chaîne est :

- a) Le nombre d'arêtes qui la composent b) Le nombre de sommets qui la composent
c) Le nombre de graphes qui la composent d) Le nombre de matrices qui la composent

Q9) Un graphe est orienté lorsque toutes ses arêtes sont définies par :

- a) Un point et une abscisse b) Une origine et une abscisse
c) Une origine et une extrémité d) Un point et un angle droit

Q10) Quelle est, approximativement, la hauteur d'un arbre binaire complet à n nœuds?

- a) $\log n$. b) $n/2$. c) 2^n . d) Cela dépend.

Q11) Laquelle de ces affirmations concernant des arbres est fausse ?

- a) la racine peut être une feuille
- b) un nœud interne possède toujours au moins un fils
- c) la racine possède toujours au moins un fils
- d) la racine ne possède jamais de père.

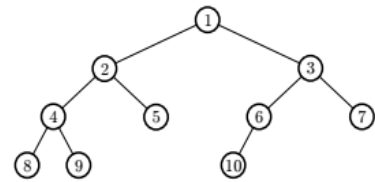


FIG. 1 – Un arbre binaire.

Q12) Dans l'arbre de la Fig. 1, le nœud 5 est :

- a) une feuille
- b) un nœud interne
- c) une racine
- d) aucun des trois.

Q13) Un parcours de l'arbre de la Fig. 1 qui traite les nœuds dans l'ordre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 puis 10 est un parcours :

- a) Préfixe
- b) infixe
- c) post-fixe
- d) en largeur

Q14) Un parcours de l'arbre de la Fig. 1 qui traite les nœuds dans l'ordre 8, 4, 9, 2, 5, 1, 10, 6, 3 puis 7 est un parcours :

- a) Préfixe
- b) infixe
- c) post-fixe
- d) en largeur

Q15) Un parcours de l'arbre de la Fig. 1 qui traite les nœuds dans l'ordre 8, 9, 4, 5, 2, 10, 6, 7, 3 puis 1 est un parcours :

- a) Préfixe
- b) infixe
- c) post-fixe
- d) en largeur

Q16) Laquelle de ces trois affirmations est fausse ?

- a) un tas est un arbre complet
- b) un tas est un arbre équilibré
- c) un tas est un arbre binaire de recherche
- d) les trois sont justes.

Q17) Le parcours en profondeur d'un arbre binaire correspond à un fonctionnement de :

- a) File (First In First Out)
- b) Pile (First In Last Out)
- c) Liste chaînée
- d) Graphe orienté.

Q18) Le parcours en profondeur d'un arbre binaire correspond à un fonctionnement de:

- c) file (First In First Out) ;
- b) pile (First In Last Out) ;
- c) liste chaînée.
- d) Cela dépend.
- e) Aucune proposition ci-dessus n'est correcte.
- f) Toutes les propositions ci-dessus sont correctes.

Q19) On souhaite calculer tous les plus courts chemins d'un nœud donné à tous les autres nœuds dans un graphe orienté, qui peut contenir des cycles et dont les arcs peuvent avoir des poids négatifs, mais sans cycle absorbant.

Quel est le meilleur algorithme pour résoudre ce problème ?

- a) L'algorithme qui fait un tri topologique des nœuds
- b) Bellman-Ford
- c) Dijkstra
- d) Floyd-Warshall.

Q20) L'algorithme de Dijkstra permet la recherche de plus courts chemins dans un graphe pondéré, orienté ou non. Pour qu'il fonctionne, le graphe doit avoir l'une des propriétés suivantes, laquelle?

- a) Le graphe doit être sans cycles.
- b) Les poids des arcs/arêtes doivent être positifs.
- c) Le graphe doit être connexe.
- d) Les poids des arcs/arêtes doivent être tous différents.

Exercice II.2: (Modélisation)

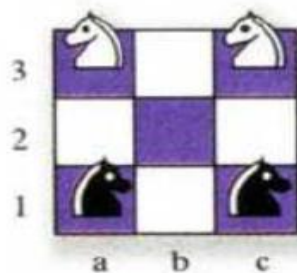
Trois professeurs P1, P2, P3 doivent donner au cours de cette semaine un certain nombre d'heures de cours à trois classes C1, C2 et C3.

- P1 doit donner une heure de cours à C1.
- P2 doit donner une heure de cours à C1, deux heures à C2 et deux heures à C3.
- P3 doit donner une heure de cours à C1 et une heure à C3.

Question : Modéliser ce problème à l'aide d'un graphe

Exercice II.3: (Modélisation)

Sur un échiquier 3×3, les deux cavaliers noirs sont placés sur les cases a1 et c1, les deux cavaliers blancs occupant les cases a3 et c3.



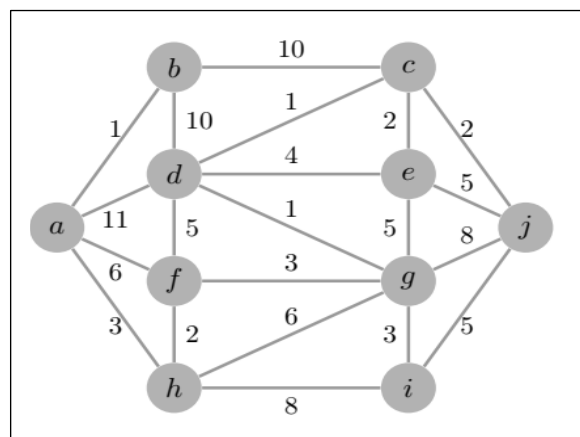
Question : Aidez-vous d'un graphe pour déterminer les mouvements alternés des blancs et des noirs qui permettront aux cavaliers blancs de prendre les places des cavaliers noirs, et vice versa. Les blancs commencent.

Exercice II.4: (Algorithme de Dijkstra)

Soit le graphe non orienté valué de la figure suivante.

Question : Utilisez l'algorithme de Dijkstra pour calculer le plus court chemin entre le sommet a et le sommet j. Pour cela, utilisez le tableau de calcul ci-dessous. La première ligne de ce tableau correspond à l'étape d'initialisation de l'algorithme. Chaque itération de l'algorithme est représentée par une nouvelle ligne dans le tableau de calcul : sélection du sommet devant être marqué puis actualisation des sommets adjacents. S'il y a plusieurs choix possibles pour sélectionner le sommet à marquer, utilisez l'ordre alphabétique.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	J
Init										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										



- A) Donnez l'arborescence des plus courts chemins à partir de **a**.
- B) Donnez le chemin obtenu de **a** vers **j** et son coût.
- C) Si on cherche le plus court chemin de **f** vers **c**, faut-il relancer l'algorithme ? Justifiez la réponse.
- D) Dans le cas général que faut-il faire ? Justifiez la réponse.
- E) Pouvez-vous utiliser d'autres algorithmes à la place de l'algorithme de Dijkstra ? Pourquoi utiliser celui de Dijkstra plutôt qu'un autre ?

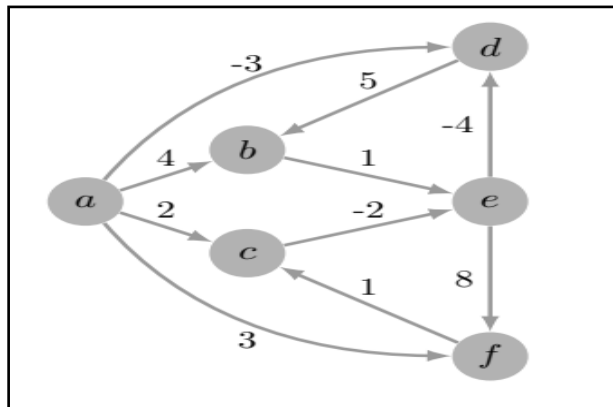
Exercice II.5: (Algorithme de Bellman-Ford)

Soit le graphe orienté valué de la figure suivante.

Utilisez l'algorithme de Bellman-Ford pour calculer le plus court chemin depuis le sommet **a** vers le sommet **b**. Pour cela, utilisez le tableau de calcul ci-dessous. La première ligne de ce tableau correspond à l'étape d'initialisation de l'algorithme. Chaque itération de l'algorithme correspond à une ligne dans le tableau de calcul : actualisation de tous les sommets du graphe pris dans l'ordre alphabétique.

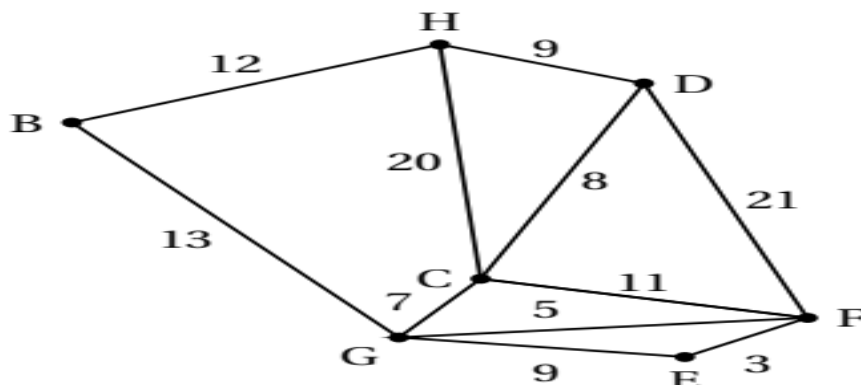
Question : Donnez le chemin obtenu et son coût.

	a	b	c	d	e	f
Init						
1						
2						
3						
4						
5						
6						



Exercice II.6:

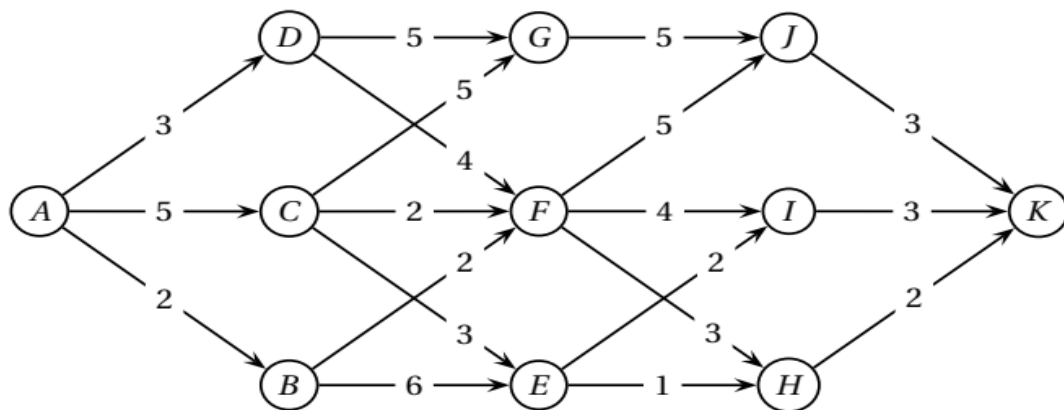
Des touristes sont logés dans un hôtel **H**. Un guide souhaite faire visiter la région à ces touristes en empruntant les routes signalées comme d'intérêt touristique par l'office du tourisme. Les tronçons de route qu'il souhaite emprunter sont représentés sur le graphe ci-contre. Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres des différents tronçons.



- Q1)** Le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux, en partant de l'hôtel et en y revenant ? Justifier la réponse.
- Q2)** Le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux, en partant de l'hôtel mais sans forcément y revenir ? Justifier la réponse.
- Q3)** Un musée est situé en **E**. Déterminer le plus court chemin menant de l'hôtel **H** au musée **E**. Justifier la réponse.

Exercice II.7:

On oriente et on pondère le graphe **G** ci-dessus pour qu'il représente un réseau d'irrigation.

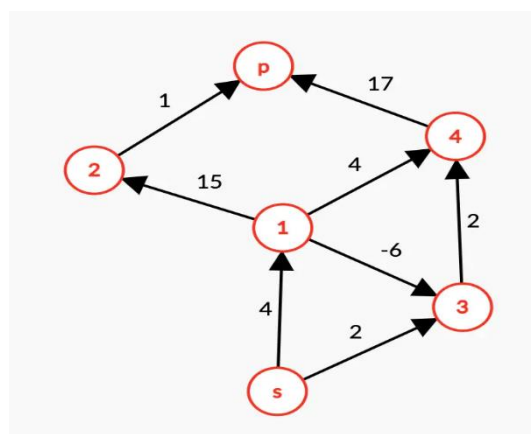


- Le sommet **A** correspond au départ d'eau, le sommet **K** au bassin d'infiltration et les autres sommets représentent les stations de régulation.
- Les arêtes représentent les canaux d'irrigation et les flèches, le sens du ruissellement.
- La pondération donne, en km, les distances entre les différentes stations du réseau.

Question : Déterminer un chemin de longueur minimale entre le départ d'eau en **A** et le bassin d'infiltration en **K** et donner sa longueur.

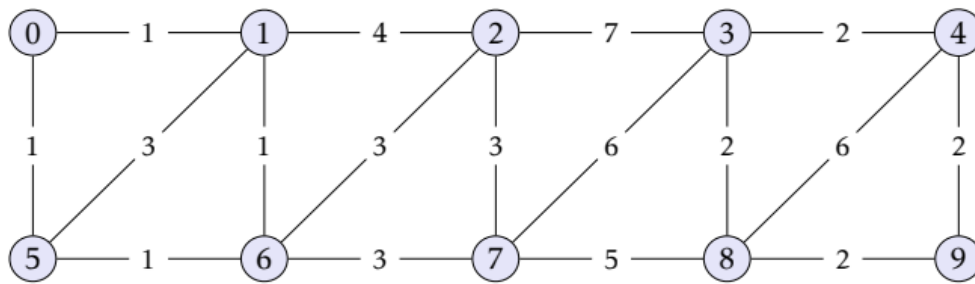
Exercice II.8:

Question : Appliquez l'algorithme de Bellman-Ford sur le digraphe suivant pour déterminer le plus court chemin de **s** à **p**.



Exercice II.9:

Question : Appliquer les algorithmes de Prim et de Kruskal au graphe ci-dessous.

**Exercice II.10:**

Q1) Trouver un arbre couvrant de poids minimal sur le graphe suivant en appliquant (On représentera la file de priorité à chaque itération.)

- a) l'algorithme de Kruskal.
- b) l'algorithme de Prim

Q2) Donnez le résultat final : arbre couvrant minimum

