

Examen final

Exercice 01 : (Questions de cours) (06pts)

- (i)- Soit M une sous variété de $\mathbb{R}^n$:
 - (a) Si la dimension de M égale 0, M
 - (b) Si la dimension de M égale 1, M
 - (c) si la dimension de M égale 2, M
- (ii)- Soit l'application $F(x, y) = (e^y, xe^y - 2y)$
 - (a) Calculer la divergence $\overrightarrow{div}(F)$.
 - (b) Calculer le rotationnel $\overrightarrow{rot}(F)$.
- (iii)- Soit ω 1-forme différentielle : $\omega = e^y dx + (xe^y - 2y)dy$.
 - (a) Calculer $d\omega$.
 - (b) Est ce que ω est fermée ?
 - (c) Est ce que ω est exacte ?.
- (iv)- Soit f une application entre deux sous-variétés M et N . Définir par un schéma l'application tangente $T_m f$ en point m .
- (v)- Soit f une application entre deux variétés différentielles M et N . Définir par un schéma l'application tangente $T_m f$ en point m .

=====

Exercice 02 : (07pts) Soit l'application f , telle que

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (e^x \cos(y), e^x \sin(y)) \end{aligned}$$

1. Ecrire la matrice Jacobienne $Jf_{(x,y)}$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées suivantes : $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f_i}{\partial y \partial x}, i = 1, 2$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
4. f est - elle un homéomorphisme local.
5. f est - elle un homéomorphisme global.
6. f est - elle un difféomorphisme.

=====

Exercice 03 : (07pts)

- 1- Soit l'ensemble $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^3 = 1\}$.
 - (a) Montrer que M est une sous-variété.
 - (b) Qu'elle est sa dimension et sa régularité.
 - (c) Déterminer $T_{(a,b)} M$: l'espace tangent de M au point $m = (a, b)$.
 - (d) Peut-on dire sur la structure de $T_m M$ dans les différents cas de valeurs a et b .
- 2- Soit S la sphère donnée par une paramétrisation suivante :

$$g(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

- (a) Montrer que g est une immersion.
- (b) Déterminer $T_m M$: l'espace tangent de M au point $m = g(1, 0)$.

Barème : $(0.5 \times 8 + 1 + 1) + (1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1)$