

Examen final

Exercice 01 : (Questions de cours) (5.5pts)

- (i)- Donner une définition simple d'une sous variété de $\mathbb{R}^n$.
- (ii)- Soient $\omega_1 \in \Omega_{C^k}^p(U \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ et $\omega_2 \in \Omega_{C^k}^p(U \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{K})$
 - (a) On appelle $\omega_1 \in \Omega_{C^k}^p(U \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{K})$
 - (b) On appelle $\omega_1 \wedge \omega_2$
 - (c) On appelle $d\omega_1$
- (iii)- Soit M une variété différentielle, comment construire un espace tangent sur M en point $m \in M$.
- (iv)- Soit f une application entre deux variétés différentielles M et N . Définir l'application tangente $T_m f$ en point m .
- (v)- Énoncer le théorème de Green-Riemann.

=====

Exercice 02 : (9.5pts)

I- Soit l'application h , telle que

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (\cos(x) + \sin(y), \sin(x) + \cos(y), e^{x-y}) \end{aligned}$$

- (i)- Ecrire la matrice Jacobienne $Jh_{(x,y)}$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (ii)- Montrer que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
- (iii)- h est-elle un difféomorphisme global.

II- Soit la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \ln(x) + \ln(y) + x + y - 2 \end{aligned}$$

- (i)- Montrer qu'il existe deux intervalles ouverts I_1 et I_2 contenant 1, tels que l'ensemble (non vide)

$$E = \{(x, y) \in I_1 \times I_2 : \varphi(x, y) = 0\},$$

soit le graphe d'une fonction ϕ sur I_1 et à valeur dans I_2 vérifiant $\phi(1) = 1$.

- (ii)- Calculer $\phi'(1)$ et $\phi''(1)$.
- (iii)- Écrire le développement limité d'ordre 2 de la fonction ϕ en point 1.

=====

Exercice 03 : (05pts) Soit l'ensemble

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1\}$$

- (1)- Montrer que M est une sous-variété.
- (2)- Qu'elle est sa dimension et sa régularité.
- (3)- Déterminer $T_{(0,0,1)}M$: l'espace tangent de M au point $m = (0, 0, 1)$.
- (4)- Peut-on dire sur la structure de $T_m M$.

Barème : (1 + 1.5 + 1 + 1 + 1) + (4.5 + 5) + (2 + 1 + 1 + 1)

Bon courage