

Examen final

Exercice 01 : (Questions de cours)(05pts)

- (i)- Quelle est la relation entre, application : difféomorphisme, $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme et homéomorphisme.
- (ii)- $\omega \in \Omega_{\mathcal{C}^k}^p(U \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ est l'ensemble de
- (iii)- Soient $f \in \Omega_{\mathcal{C}^k}^p(U \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ et $g \in \Omega_{\mathcal{C}^k}^q(U \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, on définit $f \wedge g$ est le
- (iv)- Si $\omega \in \Omega_{\mathcal{C}^k}^p(U \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, $d\omega$ est, telle que $d\omega \in \dots$
- (v)- Donner la forme générale d'une 1-forme différentielle.

Exercice 02 : (10pts)

I- Soit l'application h , telle que

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (\cos(x) + \sin(y), \sin(x) + \cos(y), e^{x-y}) \end{aligned}$$

- (i)- Ecrire la matrice Jacobienne $Jh_{(x,y)}$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
 - (ii)- Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
 - (iii)- h est - elle un difféomorphisme global.
- II- Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par :

$$g(u, v) = f(\cos(u) + \sin(v), \sin(u) + \cos(v), e^{u-v})$$

- (i)- Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
- (ii)- On suppose que f est différentiable au point $a = (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ et que sa différentielle en ce point, en convenant d'identifier une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ avec sa matrice $Jf_a = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
 - Déterminer la différentielle de g au point $a = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

III- Soit la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^y - y^x \end{aligned}$$

- Montrer qu'il existe deux intervalles ouverts I_1 et I_2 contenant 1, tels que l'ensemble (non vide)

$$E = \{(x, y) \in I_1 \times I_2 : \varphi(x, y) = 0\},$$

soit le graphe d'une fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I_1 et à valeur dans I_2 vérifiant $\phi(1) = 1$.

Exercice 03 : (05pts) Soit l'ensemble

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

- (1)- Montrer que M est une sous-variété.
- (2)- Qu'elle est sa dimension et sa régularité.
- (3)- Calculer $T_{(0,0,1)}M$: l'espace tangent de M au point $m = (0, 0, 1)$.
- (4)- Peut-on dire sur la structure de $T_m M$.

Barème : $(1 + 1 + 1 + 1 + 1) + ((1 + 1 + 2) + (1 + 1) + 4) + (2 + 0.5 + 0.5 + 1 + 1)$