

Examen final

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note finale.

Exercice 01 (Question de cours) : (05pts)

1- Donner la définition de :

- (i)- Plongement, forme différentielle alternée, Fibré tangent.
- (ii)- Enoncer le théorème de : Morse et Sard.
- (iii)- $\Lambda^p(U \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{K})$: L'ensemble
- (iv)- $\Omega_{\mathcal{C}^k}^p(U \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{K})$: L'ensemble

2- Répondre par : (Oui, Non, pas évident)

- (i)- Si M est une sous-variété, $T_m M$ est un espace vectoriel, $\forall m \in M$?.
- (ii)- Si la $\dim(M) = n$, $T_m M$ est de dimension n , $\forall m \in M$?.
- (iii)- Si M est une variété différentielle, $T_m M$ est un espace vectoriel ?.

Exercice 02 : (05pts)

Soit les ensembles suivants

$$M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 - x = 0\}.$$

$$M_2 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x < 1\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y < 1\}.$$

$$M_3 = \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1 : \text{le tore.}$$

- Est ce que M_1, M_2 et M_3 sont des sous-variétés ?, si la réponse oui qu'elle est sa dimension et régularité.

Exercice 03 : (05pts)

1- Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de 0 et un voisinage ouvert W de 1, tel que l'ensemble

$$\{(x, y) \in V \times W; 1 - ye^x + xe^y = 0\}$$

soit le graphe d'une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur V à valeur de W , vérifiant $g(0) = 1$.

2- Donner un développement limité à l'ordre 1 de g en point 0.

Exercice 04 : (05pts)

I- Soit le champ de vecteur $\vec{F} = e^y \hat{i} + (xe^y - 2y) \hat{j}$

- (i)- Calculer la divergence $\vec{\text{div}}(\vec{F})$ et le rotationnel $\vec{\text{rot}}(\vec{F})$

II- Soient ω_1 et ω_2 deux 1-forme différentielle :

$$\omega_1 = e^y dx + (xe^y - 2y) dy, \quad \omega_2 = 2xy dx + x^2 dy$$

- (i)- Calculer $d\omega_1, d\omega_2, \omega_1 \wedge \omega_2$ et $d(\omega_1 \wedge \omega_2)$
- (ii)- Montrer que ω_1 est fermée, calculer sa primitive $\omega_1 = df$

Barème : $(0.5 \times 10) + (2 + 1 + 2) + (4 + 1) + (0.5 + 1 + 0.5 \times 4 + 0.5 + 1)$

Bon courage

Corrigé type d'examen final

Exercice 01 (Questions de cours) : (05pts)

1- La définition de : Soit $\varphi : \mathcal{O} \subset E \longrightarrow F$ de classe C^k et $x \in \mathcal{O}$

1. **Définition 1** (Plongement) Soient M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^p$ un C^k -difféomorphisme de M sur $f(M)$. On dit que f est un plongement si, $f(M)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

2. **Définition 2** Soit

$$\begin{aligned} f : E \times E \times E \dots \times E = E^p &\rightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, \dots, x_p) &\mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_p) \end{aligned}$$

est dite forme linéaire alternée si,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = -f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p), \quad \forall i, j = 1, p \text{ et } i \neq j$$

3. **Définition 3** : Soit M une variété de dimension n et de classe C^k . On note par

$$TM = \bigcup_{m \in M} T_m M$$

l'ensemble de tous les vecteurs tangents en tout point de M . On appelle TM le fibré tangent.

4. **Théorème 1** (de Sard) Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une immersion en x de classe C^k , alors il existe un voisinage $\tilde{U}$ de x telle que $f(\tilde{U})$ est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^n$.

5. **Théorème 2** (de Morse) Soit f de classe C^2 au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, on suppose que 0 est un point critique non dégénéré, alors il existe un difféomorphisme local φ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$. Alors $T_0 \varphi = Id$ et

$$f(x) = f(0) + q(\varphi(x))$$

avec q une forme quadratique non dégénérée.

6. $\Lambda^p(U \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{K})$: L'ensemble des p -formes linéaires alternée.

7. $\Omega_{C^k}^p(U \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{K})$: L'ensemble des formes différentielles de degré p et de classe C^k

2- La réponse : (Oui, Non, pas évident)

1. Oui.

2. Oui.

3. pas évident (pas toujours).

Exercice 02 : (05pts)

1. $M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } x^2 + y^2 - x = 0\}$ (fenêtre de Viviani) :

M_1 n'est pas une sous-variété, car

Posons $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x^2 + y^2 - x)$

F est de classe C^∞ , $M_1 \subset \mathbb{R}^3$

$F^{-1}(1, 0) = U \cap M_1 = \mathbb{R}^3 \cap M_1 = M_1$.

F est submersion ?

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad dF_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x-1 & 2y & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $m_1 = (1, 0, 0) \in M, m_2 = (0, 0, 1) \in M$ mais

$$dF_{(1,0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang } dF_{m_1} = 1$$

$$dF_{(0,0,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang } dF_{m_2} = 2$$

Alors dF n'est pas surjective $\Rightarrow F$ n'est pas une submersion $\Rightarrow M_1$ n'est une sous-variété.

2. Soit $M_2 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x < 1\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y < 1\}$.

D'après le graphe, M_2 n'est pas une sous-variété, puisque au point 0 on a deux (02) espaces tangents.

3. $M_3 = \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$: le tore : est une sous-variété

S^1 : est une sous-variété de dimension $d = 1$ et de classe C^∞ , d'après le théorème (voir le cours : le produit de deux sous-variétés) M_3 est une sous-variété de dimension

$\dim(M_3) = \dim(S^1) + \dim(S^1) = 1 + 1 = 2$ et de régularité (classe) $C^{\inf(\infty, \infty)} = C^\infty$.

=====

Exercice 03 : (05pts)

1- Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto 1 - ye^x + xe^y \end{aligned}$$

- La fonction φ est de classe C^∞ .

$\varphi(0, 1) = 0$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = -e^x + xe^y \Rightarrow \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 1) \right| = |-1| \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ est inversible.

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un ouvert V de $\mathbb{R}$ contenant 0 et un ouvert W de $\mathbb{R}$ contenant 1, et une application $g : V \rightarrow W$ tels que :

a- $V \times W \subset U$

b-

$$E = \{(x, y) \in V \times W; \varphi(x, y) = 0\} = \{(x, g(x)); \varphi(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)\}$$

c- $\varphi(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x), \varphi(0, 1) = 0 \Leftrightarrow g(0) = 1$.

2- Le développement limité l'ordre 1 de g au voisinage de 1.

$g(x) = g(0) + \frac{(x)}{1!} g'(0) + O(x)$ $g(0) = 1$ et

$$g'(0) = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 1)}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 1)} = -\frac{e-1}{-1} = e-1$$

donc $g(x) = 1 + (e-1)x + O(x)$

=====

Exercice 04 : (03pts)

I- $\vec{F} = e^y \hat{i} + (xe^y - 2y) \hat{j} = (F_1, F_2) = (e^y, xe^y - 2y)$.

La divergence $\text{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = e^y - 2$.

Le rotationnel $\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} = (0)\hat{i} + (0)\hat{j} + (e^y - e^y)\hat{k} = 0$

II- Soient ω_1 et ω_2 deux 1-forme différentielle :

$$\omega_1 = e^y dx + (xe^y - 2y)dy, \quad \omega_2 = 2xydx + x^2dy$$

1. $d\omega_1 = e^y dy \wedge dx + e^y dx \wedge dy + (xe^y - 2)dy \wedge dy = -e^y dx \wedge dy + e^y dx \wedge dy = 0$
2. $d\omega_2 = 2y dx \wedge dx + 2x dy \wedge dx + 2x dx \wedge dy = -2x dx \wedge dy + 2x dx \wedge dy = 0$
- 3.

$$\begin{aligned}
 \omega_1 \wedge \omega_2 &= (e^y dx + (xe^y - 2y)dy) \wedge (2xy dx + x^2 dy) \\
 &= 2xye^y dx \wedge dx + x^2 e^y dx \wedge dy + 2xy(xe^y - 2y)dy \wedge dx + x^2(xe^y - 2y)dy \wedge dy \\
 &= (x^2 e^y - 2x^2 y e^y + 4xy^2) dx \wedge dy
 \end{aligned}$$

4. $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = 0$

5. ω_1 est fermée, car $d\omega_1 = 0$

6. Sa primitive $\omega_1 = e^y dx + (xe^y - 2y)dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \Leftrightarrow \omega_1 = df \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y - 2y \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y \Rightarrow f(x, y) = xe^y + C(y)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y - 2y \Rightarrow xe^y + C'(y) = xe^y - 2y \Rightarrow C'(y) = -2y \Rightarrow C(y) = -y^2 + cst$$

$$\text{alors } f(x, y) = xe^y - y^2 + cst$$