

Examen final

=====

Exercice 01 (Question de cours) : (07pts)

1- Donner la définition de :

- (i)- Immersion, submersion et étale.
 - (ii)- Variété topologique et variété différentielle.
 - (iii)- D'une forme différentielle de degré p , d'une 1-forme différentielle fermée.
 - (iv)- Énoncer le théorème : d'inversion local, de Poincaré et de Green-Riemann.
- 2- Justifier la réponse : (Oui avec un exemple, Non avec un contre exemple)

- (i)- Toute sous-variété est une variété différentielle.
 - (ii)- Toute variété différentielle est une sous-variété.
 - (iii)- Toute sous-variété est un ouvert.
- =====

Exercice 02 : (05pts)

Soit l'ensemble M_c défini par :

$$M_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = c\}$$

- Si $c = 1$, M_1 est une sous-variété ?, si la réponse oui qu'elle est sa dimension.
 - Déterminer l'espace tangent $T_{(0,0,1)}M_1$.
- =====

Exercice 03 : (05pts)

1- Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de point $(0, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que l'ensemble

$$\{(x, y) \in U^2; x^3 + y^3 + 3xy - 1 = 0\}$$

soit le graphe d'une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert V de $\mathbb{R}$, vérifiant $g(0) = 1$.

2- Donner un développement limité à l'ordre 1 de g en point 0.

=====

Exercice 04 : (03pts)

Soient ω_1 et ω_2 deux 1-formes différentielles :

$$\omega_1 = \frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy, \quad \omega_2 = 2xzdx - 2yzdy + (x^2 - y^2)dz$$

- (i)- Calculer $d\omega_1$, $d\omega_2$ et $\omega_1 \wedge \omega_2$
- (ii)- Montrer que ω_1 est fermée, calculer sa primitive $f = d\omega_1$

Corrigé type d'examen final

Exercice 01 (Question de cours) : (07pts)

1- La définition de : Soit $\varphi : \mathcal{O} \subset E \longrightarrow F$ de classe C^k et $x \in \mathcal{O}$

1. on dit que φ est une immersion en x , si df_x est injective.
2. On dit que φ est une submersion en x , si df_x est surjective.
3. Si $\varphi : \mathcal{O} \longrightarrow F$ est à la fois submersion en x et immersion en x , on dit que φ est étale.
4. Variété topologique : 1- est un espace séparé, 2- Pour tout $m \in M$, il existe un ouvert U de M contenant m est un homéomorphisme $\varphi : U \longrightarrow W \subset \mathbb{R}^n$ ou W un ouvert de $\mathbb{R}^n$
5. On appelle variété différentielle M de dimension n est de classe C^k la donnée de l'espace topologique sépare M et d'un système de carte de classe C^k et de dimension n
6. On appelle forme différentielle de degré p sur l'ouvert $U \subset E$, toute application ω de la forme

$$\begin{aligned} \omega : U \subset E &\longrightarrow A^p(U, \mathbb{K}) \\ x &\longmapsto \omega(x) = \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_p \leq n} a_{i_1, i_2, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \end{aligned}$$

où $a_{i_1, i_2, \dots, i_p}$ sont des fonctions continues.

7. On appelle ω 1-forme différentielle fermée si $d\omega = 0$.

8. **Théorème 1** : (d'inversion locale)

Soient u et v deux ouverts de E et F et soit $\varphi \in C^k(u, v)$ une application étale en $x \in u$, alors il existe un ouvert $\tilde{u}$ de u contenant x tel que $\varphi|_{\tilde{u}} : \tilde{u} \longrightarrow \varphi(\tilde{u}) \subset F$ Soit C^k -difféomorphisme de $\tilde{u}$ dans $\varphi(\tilde{u})$

9. **Théorème 2** (de Green-Riemann)

Soit Ω un ouvert élémentaire de $\mathbb{R}^2$ et ω est une 1-forme de classe C^1 sur un ouvert contenant $\overline{\Omega}$, alors on a

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega.$$

On rappelle que si on note $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, on a

$$\int_{\Omega} d\omega = \int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

10. **Théorème 3** (de Poincaré)

Si U est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$, alors toute forme différentielle sur U qui est fermée est exacte.

2- Justifier la réponce : (c-à-d, Oui avec exemple, Non avec contre exemple)

1. Oui, par exemple : le cercle
2. Non ; Le caré
3. Oui, la sphère, un intervalle

=====

Exercice 02 : (05pts)

Soit l'ensemble M_c défini par :

$$M_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = c\}$$

- Si $c = 1$, M_1 est une sous-variété, si la réponse oui qu'elle est sa dimension.

- Déterminer l'espace tangent $T_{(0,0,1)}M_1$.

$$M_1 = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$$\forall x \in M_1, x = (x_0, y_0, z_0) \quad \exists U, x \in U$$

$$\text{Posons } \varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

φ est de classe C^∞ , $M_1 \subset \mathbb{R}^3$

$$\varphi^{-1}(0) = U \cap M_1 = \mathbb{R}^3 \cap M_1 = M_1$$

φ est submersion ?

$$\forall (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$$

$$df_{(x_0, y_0, z_0)} = (2x_0 \quad 2y_0 \quad 2z_0)$$

$$\text{rang } d_\varphi = \begin{cases} 1 & x_0 = y_0 = z_0 \neq 0 \\ 0 & x_0 = y_0 = z_0 = 0 \end{cases}$$

$$(0, 0, 0) \notin S^2$$

$$d_\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x \in M_1, \text{rang } d_\varphi = 1 = \dim \mathbb{R} \implies \varphi \text{ est submersion.}$$

Alors $S^2 = M_1$ est une sous-variété de dimension $d = n - p = 2$ et de classe C^∞ .

$$\text{Soit } S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$$m = (0, 0, 1) \text{ Calculer } T_{(0,0,1)}S^2$$

Solution :

$$\text{Soit } f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

$$f^{-1}(0) = U \cap M_1 = M_1 \quad \setminus \quad M_1 = S^2$$

f submersion

$\forall x \in \mathbb{R} \quad df_x$ surjective

$$d_{(x,y,z)}f = (2x \quad 2y \quad 2z)$$

$$\text{rang } (d_{(x,y,z)}f) = 1 = \dim \mathbb{R}$$

$$\implies df_x \text{ est surjective} \implies f \text{ est submersion}$$

$$\text{Alors } T_{(0,0,1)}S^2 = \ker(df_{(0,0,1)})$$

$$d_{(0,0,1)}f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \longmapsto (0 \ 0 \ 2) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

alors $df_{(0,0,1)}H = 2h_3$, $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$

$$T_{(0,0,1)}S^2 = \{(h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3 : df_{(0,0,1)} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0\}$$

$$= \{(h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3, 2h_3 = 0\}$$

$T_{(0,0,1)}M_1 = T_{(0,0,1)}S^2$ est le plan.

=====

Exercice 03 : (05pts)

1- Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^3 + y^3 + 3xy - 1 \end{aligned}$$

- La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

$\varphi(0, 1) = 0$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 3y^2 + 3x \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 1) = 3 \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ est inversible.

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un ouvert V de $\mathbb{R}$ contenant 0 et un ouvert W de $\mathbb{R}$ contenant 1, et une application $g : V \rightarrow W$ tels que :

a- $V \times W \subset U$

b- $\varphi(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$, $\varphi(0, 1) = 0 \Leftrightarrow g(0) = 1$.

2- Le développement limité à l'ordre 1 de g au voisinage de 1.

$g(x) = g(0) + \frac{(x)}{1!}g'(0) + O(x)$ $g(0) = 1$ et

$$g'(0) = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 1)}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 1)} = -\frac{3}{3} = -1$$

donc $g(x) = 1 + x + O(x)$

=====

Exercice 04 : (03pts)

Soient ω_1 et ω_2 deux 1-forme différentielle :

$$\omega_1 = \frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy, \quad \omega_2 = 2xzdx - 2yzdy + (x^2 - y^2)dz$$

$$1. \quad d\omega_1 = \frac{2}{y}dx \wedge dx - \frac{2x}{y^2}dy \wedge dx - \frac{2x}{y^2}dx \wedge dy + \frac{2x^3}{y^3}dy \wedge dy = \frac{2x}{y^2}dx \wedge dy - \frac{2x}{y^2}dx \wedge dy = 0$$

$$2. \quad d\omega_2 = 2zdx \wedge dx + 2xdz \wedge dx - 2ydz \wedge dy - 2zdy \wedge dy + 2xdx \wedge dz - 2ydy \wedge dz = 0$$

3.

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_2 &= \left(\frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy\right) \wedge (2xzdx - 2yzdy + (x^2 - y^2)dz) \\ &= (4xz + \frac{2x^3z}{y^2})dx \wedge dy + (\frac{2x^3}{y} - 2xy)dx \wedge dz - (\frac{x^4}{y^2} - x^2)dy \wedge dz \end{aligned}$$

4. ω_1 est fermée, car $d\omega_1 = 0$

5. Sa primitive $f = d\omega \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y} \Rightarrow f(x, y) = \frac{x^2}{y} + C(y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} + C'(y) \Rightarrow C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = cst$$

$$\text{alors } f(x, y) = \frac{x^2}{y} + cst$$