

Université de M'sila
 Faculté des mathématiques et de l'Informatique
 Département de Mathématiques
 2^{ième} année Mathématiques
 Durée: 1^h et 30^m

Examen final (Analyse complexe)
(20/05/2024)

Exercice 1 (12pts) I) Répondre par vrai ou faux et justifier:

- 1) Soit $g(z) = \frac{\sin z}{z}$. La fonction g admet un pôle en $z = 0$.
- 2) Le chemin de Jordan est un chemin ni fermé ni simple.
- 3) D'après le théorème des résidus, on a

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)(z-3)} dz = 2\pi i \text{Rés} \left(\frac{e^z}{(z-1)(z-3)}, 3 \right).$$

- 4) La racine complexe est une fonction uniforme.
 - 5) Toute fonction complexe vérifie les C.C.R est holomorphe.
- II) Trouver la fonction holomorphe $f(z = x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ tel que $Q(x, y) = 2x(1 - y)$.
- III) Rappeler le théorème de Rouché, puis trouver le nombre de racines de l'équation $z^5 + z^3 - 4z + 1 = 0$ dans le disque $|z| < 2$.

Exercice 2 (8pts)

- I) Calculer $\int_{\gamma} \bar{z} dz$ sur $\gamma(t) = 2 \cos t + 3i \sin t$ (avec $0 \leq t \leq 2\pi$).
- II) En utilisant les formules intégrales de Cauchy, calculer l'intégrale suivante: $\int_{|z-2|=8} \frac{dz}{z^2 + 16}$.
- III) Soit $f(z) = \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}$.
- III.1) Trouver les résidus de $f(z)$ en tous ses pôles. Puis calculer

$$I = \int_{|z|=1} f(z) dz.$$

- III.2) Déduire la valeur de $J = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \sin x}$.

Exercice 3 (Bonus) (2pts) Calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(1+x^2)^2}$.

Bonne chance

Corrigé type d'examen d'analyse complexe

Exercice 4 (1) I) 1-faux, car on a $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$, donc $z = 0$ est une singularité apparente de f . (1pt).

2-faux, car le chemin de Jordan est un chemin fermé et simple. (1pt).

3- faux, $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)(z-3)} dz = 2\pi i \text{Rés} \left(\frac{e^z}{(z-1)(z-3)}, 1 \right)$, car $z = 3$ à l'extérieur de $|z| = 2$ et. (1pt)

4-faux, car $\sqrt{-1} = e^{i(\pi+2k\pi)}$ et $k \in \mathbb{Z}$, donc elle est multiforme. (1pt)

5-faux, voir le contre exemple qu'on a vu dans le cours. (1pts)

II) On trouve la fonction holomorphe $f(z = x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ tel que $Q(x, y) = 2x(1 - y)$. Comme la fonction f est holomorphe, donc elle vérifie les conditions de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

et on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) &= 2(1 - y) \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) &= 2x, \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= -2(1 - y) \\ \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) &= 2x. \quad (1pt) \end{aligned}$$

1-On a $\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$, donc P est harmonique (1pt).

2) En utilisant les C.C.R, $\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ on

$$a \quad \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = y \Rightarrow P(x, y) = \int \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) dx = \int \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) dx = x^2 + h(y) \quad (1pt)$$

$$\text{et on a } \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \Rightarrow h'(y) = -2(1 - y) \Rightarrow$$

$$h(y) = -2\left(y - \frac{y^2}{2}\right) + k \text{ et } k \in \mathbb{C}, \text{ ceci implique que } P(x, y) = x^2 - 2\left(y - \frac{y^2}{2}\right) + k \text{ et } k \in \mathbb{C} \quad (1pt).$$

IV) Pour le rappel du théorème de Rouché (voir le cours) (1pt).

Pour trouver le nombre de racines de l'équation $z^5 + z^3 - 4z + 1 = 0$ dans le disque $|z| < 2$. En appliquant le théorème de Rouché dans le disque $|z| < 2$,

on pose $f(z) = z^5$ et $g(z) = z^3 - 4z + 1$, si $z \in C(0, 2)$, i.e., $|z| = 2$, on a

$$|g(z) = z^3 - 4z + 1| \leq |z^3| + 4|z| + 1 = 17 \leq \frac{1}{4^4} + 1 \leq |f(z)| = 2^5 = 64 \text{ (1pt)}$$

conclusion: $f(z) = z^5$ et $f(z) + g(z) = z^5 + z^3 - 4z + 1$ ont le même nombre des zéros sur $D(0; 2)$; et comme $z_0 = 0$ est une racine d'ordre 5 de $f(z) = z^5$, alors $z^5 + z^3 - 4z + 1$ admet cinq racines dans $D(0; 2)$. (1pt)

Exercice 5 (2) I) On calcule $I = \int_{\gamma} \bar{z} dz$ sur $\gamma(t) = \underbrace{3 \cos t}_{x(t)} + i \underbrace{5 \sin t}_{y(t)}$ avec $0 \leq t \leq 2\pi$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \bar{z} dz &= \int_0^{2\pi} (3 \cos t - i5 \sin t) (-3 \sin t + i5 \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (15i - 16 \sin t \cos t) dt \\ &= 30\pi i + 4 \text{ (2pts)} \end{aligned}$$

II) En utilisant les formules intégrales de Cauchy, on calcule les intégrale suivante: $\int_{|z-2|=8} \frac{dz}{z^2 + 16} dz = \frac{i}{8} \left(\int_{|z-2|=8} \frac{1}{z-4i} dz - \int_{|z-2|=8} \frac{1}{z+4i} dz \right) = 2\pi i (f(4i) - f(-4i)) = 0$ avec les singularités sont $z_0 = 4i$, $z_1 = -4i$, et on a $z_0 = 4i$, $z_1 = -4i$ sont à l'extérieur de $\{z \in C : |z-2| = 8\}$ et z_1 est à l'intérieur de $\{z \in C : |z-2| = 8\} = C(2; 8)$, et $f(z) = 1$ est holomorphe à l'intérieur de $\{z \in C : |z-2| = 8\}$ (2pt).

II) 1-On a les singularités de f sont les racines de $z^2 + 4iz - 1$, i.e.,

$$z^2 + 4iz - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = (\sqrt{3} - 2)i \\ z_1 = -(\sqrt{3} + 2)i \end{cases}$$

les singulqrités z_0 et z_1 sont des pôles simples, donc

$$\begin{aligned} \text{Rés}(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{2}{z - z_1} = \frac{2}{(\sqrt{3}-2)i + (\sqrt{3}+2)i} = \frac{1}{\sqrt{3}i} \\ \text{Rés}(f, z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) = \frac{2}{z - z_0} = \frac{1}{(-\sqrt{3}+2)i} \end{aligned}$$

En utilisant le théorème des résidus, pour calculer $I = \int_{|z|=1} f(z) dz$, donc $I = 2\pi i \text{Rés}(f, z_0) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; car z_0 à l'interieur de $|z| = 1$ et z_1 à l'exterieur de $|z| = 1$. (2pts)

2) En Déduire la valeur de $J = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \sin x} dz$. On a $2 + \sin x \neq 0$ sur $\mathbb{R}$. On pose $z = e^{iz}$, $\cos z = \frac{z + \bar{z}}{2}$; $dz = iz dx$, donc $J = \int_{|z|=1} f(z) dz = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. (2pts)

Exercice 6 (3-Bonus) $I_2 = J = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(1+x^2)^2}$. On a

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-ix} dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{(1+x^2)^2}.$$

Posons $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ avec $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$. L'intégrale $J = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx =$
 $\frac{1}{2} \sum_{\text{Im } z_k \geq 0} \text{Rés}(f(z) e^{iz}, z_k) = 2\pi i \text{Rés}(f(z) e^{iz}, i) = \frac{\pi}{e}. \textbf{(2pts)}$