

Université de M'sila
 Faculté des mathématiques et de l'Informatique
 Département de Mathématiques
 2^{ième} année Mathématiques
 Durée: 1^h et 30^m

Examen final (Analyse complexe)
(25/05/2023)

Exercice 1 (12pts) I) Répondre par vrai ou faux et justifier:

- 1) La fonction exponentielle complexe est bijective.
- 2) Tout chemin fermé est simple.
- 3) D'après le théorème de Cauchy, on a $\int_{[0,i]} e^z dz = 0$.

II) Soit

$$f(z) = \frac{1}{z} + z \operatorname{Re}(z), \forall z \in \mathbb{C}^*.$$

Calculer $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$. Est ce que f est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$? Justifier.

III) Trouver la fonction holomorphe $f(z = x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ tel que $P(x, y) = xy$.

IV) Rappeler le théorème de Rouché, puis trouver le nombre de racines de l'équation $z^4 - 5z + 1 = 0$ dans le disque $|z| < \frac{1}{4}$.

V) Trouver le développement en série de Laurent, de la fonction $f(z) = \frac{1}{(z-3)(z-2)}$ dans la couronne $C(0, 2, 3) = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 3\}$.

Exercice 2 (8pts)

- 1) Calculer $\int_{\gamma} (x - iy) dz$ sur $\gamma(t) = 2 \cos t + 3i \sin t$ (avec $0 \leq t \leq 2\pi$).
- 2) En utilisant les formules intégrales de Cauchy, calculer l'intégrales suivante: $\int_{|z-2|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z-2)^2} dz$.
- 3) En utilisant le théorème des résidus, calculer les intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}, \quad I_3 = \int_{|z|=2} \tan(z) dz.$$

Bonne chance
A.Tallab

Corrigé type d'examen d'analyse complexe

Exercice 3 I) 1-faux, car on a $e^{2\pi i} = e^0 = 1$, mais $2\pi \neq 0$ (1pt).

2-faux, on peut tracer un lacet fermé mais pas simple. (1pt).

3- faux, car $[0, i]$ n'est pas un lacet. (1pt)

II) On a $f(z) = \frac{1}{z} + z \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{z} + z \frac{z + \bar{z}}{2}, \forall z \in \mathbb{C}^*$, donc $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{z}{2} \neq 0$, Ce qui montre que f n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. (2pts)

III) On trouve la fonction holomorphe $f(z = x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ tel que $P(x, y) = xy$.

Comme la fonction f est holomorphe, donc elle vérifie les conditions de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

et on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) &= y \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) &= x, \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= x \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) &= y. \end{aligned}$$

II) 1) On a $\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$, donc P est harmonique (1pt).

2) En utilisant les C.C.R, $\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ on

a $\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = y \Rightarrow Q(x, y) = \int \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) dy = \frac{y^2}{2} + h(x)$ et on

a $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \Rightarrow h'(x) = -x \Rightarrow h(x) = \frac{-x^2}{2} + k$ et $k \in \mathbb{C}$, ceci

implique que $Q(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{-x^2}{2} + k$ et $k \in \mathbb{C}$ (1pt).

IV) Pour le rappel du théorème de Rouché (voir le cours) (1pt).

Pour trouver le nombre de racines de l'équation $z^4 - 5z + 1 = 0$ dans le disque $|z| < \frac{1}{4}$. En appliquant le théorème de Rouché dans le disque $|z| < \frac{1}{4}$, on pose $f(z) = -5z$ et $g(z) = z^4 + 1$ si z appartient au cercle $|z| = \frac{1}{4}$, on a

$$|g(z) = z^4 + 1| \leq |z^4| + 1 \leq \frac{1}{4^4} + 1 \leq |f(z)| = \frac{5}{4} \text{ (1pt)}$$

conclusion : $f(z) = 5z$ et $f(z) + g(z) = z^4 - 5z + 1$ ont le meme nombre des zéros sur $D(0; \frac{1}{4})$; et comme $z_0 = 0$ est une racine simple de $f(z) = 5z$, alors $z^4 - 5z + 1$ admet une racine dans $D(0; \frac{1}{4})$. (1pt)

V) On trouve le développement en série de Laurent, de la fonction $f(z) = \frac{1}{(z-3)(z-2)}$ dans la couronne $C(0, 2, 3) = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 3\}$. On a

$$f(z) = -\frac{1}{(z-2)} + \frac{1}{(z-3)}. (1pt)$$

$$-\frac{1}{(z-2)} = -\frac{1}{z(1-\frac{2}{z})} = -\frac{1}{z} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{2}{z}\right)^n, \text{ car } 2 < |z|. (1pt)$$

$$\frac{1}{(z-3)} = -\frac{1}{3(1-\frac{z}{3})} = -\frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{3}\right)^n, \text{ car } |z| < 3. (1pt)$$

Alors, $f(z) = -\frac{1}{z} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{2}{z}\right)^n - \frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{3}\right)^n$, pour $2 < |z| < 3$.

Exercice 4 1) $\int_{\gamma} (x - iy) dz$ sur $\gamma(t) = \underbrace{2 \cos t}_{x(t)} + i \underbrace{3 \sin t}_{y(t)}$ (avec $0 \leq t \leq 2\pi$),

on a $\int_{\gamma} (x - iy) dz = \int_0^{2\pi} (2 \cos t - i3 \sin t) \underbrace{(-2 \sin t + 3i \cos t)}_{\gamma'(t)} dt = \int_0^{2\pi} (6i + 5 \sin t \cos t) dt =$

$12\pi i$. (1.5pts)

2) En utilisant les formules intégrales de Cauchy, on calcule les intégrales suivantes:

a) Pour $\int_{|z-2|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z-2)^2} dz = \int_{|z-2|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{e^z}{z}}{(z-2)^2} dz = 2\pi i f'(2)$ avec les singularités sont $z_0 = 0$, $z_1 = 2$, et on a $z_0 = 0$ est à l'extérieur de $\{z \in C : |z-1| = \frac{1}{2}\}$ et z_1 est à l'intérieur de $\{z \in C : |z-1| = \frac{1}{2}\}$, et $f(z) = \frac{e^z}{z}$ est holomorphe à l'intérieur de $\{z \in C : |z-1| = \frac{1}{2}\}$ (1.5pt).

3) En utilisant le théorème des résidus, pour calculer les intégrales données:

$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$. On a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x} dx = \mathcal{F}\left(\frac{1}{x}\right)(1)$ et on $z_0 = 0$ est un pôle simple de $\frac{e^{iz}}{z}$ avec $\text{Res}\left(\frac{e^{-iz}}{z}, 0\right) = 1$, et

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_{R,r}} f(z) dz = 0$$

et $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = \int_{-\pi}^0 \frac{e^{-ire^{it}}}{re^{it}} ire^{it} = i\pi$. D'autre part on a

$$\lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \left(\int_{-R}^{-r} + \int_r^R \right) f(z) dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_{R,r}} f(z) dz + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = 0$$

alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x} dx = i\pi$$

Ce qui donne

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = \pi. \textbf{(2pts)}$$

b) $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)}$, on pose $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)}$, alors $z_0 = -i$ et $z_1 = i$ sont des pts singuliers de f . En utilisant le théorème des résidus, on a

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)} = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z_k) > 0} \text{Res}(f, z_k) = 2\pi i \text{Res}(f, i) = \pi \textbf{(1.5pt)}.$$

Avec $z_1 = i$ est un pôle simple, car $\lim_{z \rightarrow i} (z - i) f(z) = \frac{1}{2i}$ et $\text{Res}(f, i) = \frac{1}{2i}$.

c) $\int_{|z|=2} \tan(z) dz = \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{\cos z} dz$. Si $\cos z = 0$, alors $z_k = (2k + 1) \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas ($|z| = 2$) les singularités sont $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$, donc

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} \tan(z) dz &= 2\pi i \left(\text{Res}\left(f, \frac{\pi}{2}\right) + \text{Res}\left(f, -\frac{\pi}{2}\right) \right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \right) = -4\pi. \textbf{(1.5pts)} \end{aligned}$$

Avec $\text{Res}\left(f, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{g(z)}{h'(z)}$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0, h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, mais $h'\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$ telles que $g(z) = \sin z$ et $h(z) = \cos z$.