

Université de M'sila
Faculté des mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques
2^{ième} année Mathématiques
Durée: 1^h et 30^m

Examen final (Analyse complexe)
(25/05/2023)

Exercice 1 (12pts) I) Répondre par vrai ou faux et justifier:

- 1) La fonction exponentielle complexe est bijective.
- 2) Tout chemin fermé est simple.
- 3) D'après le théorème de Cauchy, on a $\int_{[0,i]} e^z dz = 0$.

II) Soit

$$f(z) = \frac{1}{z} + z \operatorname{Re}(z), \forall z \in \mathbb{C}^*.$$

Calculer $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$. Est ce que f est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$? Justifier.

III) Trouver la fonction holomorphe $f(z = x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ tel que $P(x, y) = xy$.

IV) Rappeler le théorème de Rouché, puis trouver le nombre de racines de l'équation $z^4 - 5z + 1 = 0$ dans le disque $|z| < \frac{1}{4}$.

V) Trouver le développement en série de Laurent, de la fonction $f(z) = \frac{1}{(z-3)(z-2)}$ dans la couronne $C(0, 2, 3) = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 3\}$.

Exercice 2 (8pts)

- 1) Calculer $\int_{\gamma} (x - iy) dz$ sur $\gamma(t) = 2 \cos t + 3i \sin t$ (avec $0 \leq t \leq 2\pi$).
- 2) En utilisant les formules intégrales de Cauchy, calculer l'intégrales suivante: $\int_{|z-2|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z-2)^2} dz$.
- 3) En utilisant le théorème des résidus, calculer les intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}, \quad I_3 = \int_{|z|=2} \tan(z) dz.$$

Bonne chance

A.Tallab

Corrigé type d'examen d'analyse complexe

Exercice 3 1) Voir le cours (1pt + 1pt + 1pt + 1pt).

2) On a $\text{Log}(z^n) \neq n\text{Log}(z)$, car on a

$$\begin{aligned}\text{Log}(i-1)^2 &= \text{Log}(-2i) \\ &= \ln|-2i| + i\text{Arg}(-2i) \\ &= \ln 2 + \frac{\pi}{2}i \\ &\neq 2\text{Log}(i-1) = 2(\ln|i-1| + i\text{Arg}(i-1)) \\ &= 2\left(\ln\sqrt{2} + \frac{3\pi}{4}i\right) \\ &= \ln 2 + \frac{3\pi}{2}i. \textbf{(2pts)}\end{aligned}$$

Exercice 4 I) Soit $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$ et soit

$$f(z) = \alpha x + iy + ie^z$$

1) On écrit $f(z)$ sous la forme $P(x, y) + iQ(x, y)$. On a

$$\begin{aligned}f(x + iy) &= \alpha x + iy + ie^{x+iy} \\ &= \alpha x + iy + ie^x(\cos y + i \sin y) \\ &= \underbrace{\alpha x - e^x \sin y}_{P(x,y)} + i \underbrace{(y + e^x \cos y)}_{Q(x,y)}. \textbf{(1.5pt)}\end{aligned}$$

2) La fonction f est holomorphe, donc elle vérifie les conditions de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

et on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) &= \alpha - e^x \sin y \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) &= 1 - e^x \sin y, \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= -e^x \cos y \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) &= e^x \cos y.\end{aligned}$$

Ceci implique que $\alpha = 1$, car f elle vérifie les conditions de Cauchy-Riemann (1.5pt).

II) 1) On a $\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0$, donc P est harmonique (1pt).
 2) En utilisant les C.C.R, $\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ on a $\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 2 \Rightarrow Q(x, y) = \int \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) dy = 3x^2 y - y^3 + 2y + h(x)$ et on a $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \Rightarrow 6xy + h'(x) = -(-6xy) \Rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow h(x) = k$ et $k \in \mathbb{R}$, ceci implique que $Q(x, y) = 3x^2 y - y^3 + 2y + k$ et $k \in \mathbb{R}$ (2pts).

Exercice 5 1) $\int_{[0,i] \cup [i,i+2]} y dz = \int_{[0,i]} y dz + \int_{[i,i+2]} y dz$ pour $\int_{[0,i]} y dz$ on pose $z(t) = x(t) + iy(t) = it \Rightarrow dz = i dt$ avec $0 \leq t \leq 1$, donc $\int_{[0,i]} y dz = \int_0^1 t(i dt) = \frac{i}{2}$.

Et on a pour $\int_{[i,i+2]} y dz$, on pose $z(t) = x(t) + iy(t) = t + i \Rightarrow dz = dt$ avec $0 \leq t \leq 2$ et $\int_{[0,i]} y dz = \int_0^2 dt = 2$, alors $\int_{[0,i] \cup [i,i+2]} y dz = \int_{[0,i]} y dz + \int_{[i,i+2]} y dz = \frac{i}{2} + 2$ (1pt).

Pour $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2}$ on pose $z(t) = 2e^{it} \Rightarrow dz = 2ie^{it} dt$ avec $0 \leq t \leq 2\pi$, alors $\int_0^{2\pi} \frac{2ie^{it} dt}{4e^{2it}} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} e^{-it} dt = \left[\frac{-i}{2} e^{-it} \right]_0^{2\pi} = 0$ (1pt).

2) En utilisant les formules intégrales de Cauchy, on calcule les intégrales suivantes:

a) Pour $\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z-1)} dz = \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{e^z}{z}}{(z-1)} dz = 2\pi i f(1)$ avec les singularités sont $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, et on a $z_0 = 0$ est à l'extérieur de $\{z \in C : |z-1| = \frac{1}{2}\}$ et est à l'intérieur de $\{z \in C : |z-1| = \frac{1}{2}\}$, $f(z) = \frac{e^z}{z}$ est holomorphe à l'intérieur de $\{z \in C : |z-1| = \frac{1}{2}\}$ (1.5pt).

b) De la même manière nous avons $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^3(z-4)} = \frac{2\pi i f''(1)}{2!} = \frac{-1}{32} \pi i$ avec $f(z) = \frac{1}{(z-4)}$ (1.5pt).

3) En utilisant le théorème des résidus, on calcule les intégrales suivantes:

$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \sin(x)}$ sous la forme $\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos x, \sin x) dx$ et $2 + \sin(x)$ ne s'annule

pas dans $\mathbb{R}$, donc on pose $\begin{cases} \cos x = \frac{z + z^{-1}}{2} \\ \sin x = \frac{z - z^{-1}}{2i} \\ dx = \frac{dz}{iz} \end{cases} \Rightarrow I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \sin(x)} =$

$\int_{|z|=1} \frac{2dz}{z^2 + 4iz - 1}$ et on a

$$z^2 + 4iz - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = z_0 = (\sqrt{3} - 2)i; |z_0| < 1 \\ z = z_1 = -(\sqrt{3} + 2)i; |z_1| > 1 \end{cases}, \text{ alors}$$

$$I_1 = 2\pi i \text{Rés}(f, z_0) \text{ où } f(z) = \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}.$$

z_0 est un pôle simple, car $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{1}{\sqrt{3}i} = \text{Rés}(f, z_0)$. Alors

$$I_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \text{ (1.5pt)}.$$

b) $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$, on pose $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$, alors $z_0 = -i$ et $z_1 = i$ sont des pts singuliers de f . En utilisant le théorème des résidus, on a

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z_k) > 0} \text{Res}(f, z_k) = 2\pi i \text{Res}(f, i) = \frac{\pi}{2} \text{ (1.5pt)}.$$

Avec $z_1 = i$ est un pôle double, car $\lim_{z \rightarrow i} (z - i)^2 f(z) = \frac{-1}{4}$ et $\text{Res}(f, i) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow i} [(z - i)^2 f(z)]' = \frac{1}{4i}$.