

Mathématiques Générales

Analyse complexe

Dr Nouredine ASSAAD
Docteur ès Sciences Physiques et Mathématiques
Professeur à l'ISAE

1998

Table des matières

1	Notions d'algèbre des nombres complexes	4
1.1	Définitions	4
1.2	Représentation cartésienne.	4
1.3	Représentation polaire.	5
1.4	Représentation exponentielle.	5
1.5	Module et argument.	6
1.5.1	Propriétés	6
1.6	Cojugué d'un nombre complexe	6
1.6.1	Propriétés	6
1.7	Opérations sur les nombres complexes.	7
1.7.1	Egalité :	7
1.7.2	Addition et soustraction.	7
1.7.3	Multiplication et division.	7
1.7.4	Nombres complexes particuliers.	8
1.7.5	Rotation.	8
1.8	Formule de De Moivre.	8
1.9	Racines d'un nombre complexe	8
1.10	EXERCICES	9
2	Fonction complexe d'une variable complexe	11
2.1	Définition :	11
2.2	Fonctions uniformes	11
2.3	Fonctions inverses :	11
2.4	Limites	12
2.4.1	Définition	12
2.4.2	Propriétés :	12
2.5	Continuité	12
2.5.1	Définition	12
2.5.2	Prolongement par continuité	13
2.6	EXERCICES	13
3	Dérivation complexe	15
3.1	Définitions	15
3.1.1	Fonctions uniforme	15
3.1.2	Domaines connexes	15

3.2	Dérivation complexe :	15
3.2.1	Définition :	15
3.2.2	Fonctions analytiques	16
3.3	Conditions de Cauchy-Riemann	16
3.3.1	Définition	16
3.3.2	Fonctions Harmoniques :	17
3.4	Différentielle :	18
3.5	Règles de dérivations :	18
3.6	Fonctions complexes élémentaires :	19
3.6.1	Fonctions polynômes :	19
3.6.2	Fonction exponentielle :	19
3.6.3	Fonction Logarithme :	19
3.6.4	Fonctions trigonométriques	19
3.6.5	Fonctions hyperboliques	20
3.6.6	Fonctions inverses :	21
3.7	Dérivés usuelles :	21
3.8	EXERCICES	21
4	Intégration complexe	23
4.1	Définition	23
4.2	Propriétés :	24
4.2.1	Théorème de Cauchy	24
4.2.2	Théorème	24
4.2.3	Généralisation du théorème de Cauchy	25
4.3	Formules intégrales de Cauchy	25
4.3.1	Formule Majorante	25
4.3.2	Première formule intégrale de Cauchy	25
4.3.3	Dérivées en un point d'une fonction holomorphe; formule gé- nérale de Cauchy	26
4.4	EXERCICES	26
5	Séries complexes	28
5.1	Généralités sur les séries :	28
5.1.1	Définitions	28
5.1.2	Résultats généraux utiles	28
5.1.3	Séries à termes positifs	29
5.1.4	Séries alternées	30
5.1.5	Séries de fonctions	30
5.1.6	Séries entières	31
5.2	Série de Taylor. Série de Mac-Laurin	33
5.2.1	Définitions	33
5.2.2	Développement en série de Taylor	33
5.3	Série de Laurent	35
5.3.1	Définition	35

6 Zéros, Pôles et Résidus	36
6.1 Définitions	36
6.1.1 Points singuliers	36
6.1.2 Points ordinaire	36
6.2 Zéros,Pôles et Résidus	36
6.2.1 Zéros d'une fonction holomorphe :	36
6.2.2 Pôles	36
6.2.3 Résidu en un pôle	37
6.2.4 Théorème	37
6.3 Théorème des résidus	37
6.4 Calcul des résidus	38
6.4.1 Cas d'un pôle simple	38
6.4.2 Cas d'un pôle multiple	39
6.5 Dénombrement des zéros et des pôles	39
6.5.1 Théorème	40
6.5.2 Théorème :	40
6.6 Applications : Calcul des intégrales définies	40
6.6.1 Intégrales du premier type	41
6.6.2 Intégrales du second type	41
6.6.3 Intégrale mixte	43
6.6.4 Exemples	43

Chapitre 1

NOTIONS D'ALGÈBRE DES NOMBRES COMPLEXES

La notion complexe et ses propriétés sont très utiles dans divers domaines de physique :

1. En électricité : Fonctionnement d'un circuit en régime sinusoïdal forcé.
2. En optique : Etude des interférences et de diffractions lumineuses et les ondes électromagnétiques.
3. En mécanique : Régime sinusoïdal forcé d'un oscillateur harmonique, les phénomènes vibratoires.

1.1 Définitions

Un nombre complexe c'est tout nombre z qui peut se mettre sous la forme :

$$z = x + jy \quad (1.1)$$

Où x et y sont des réels et j le nombre imaginaire pur défini par :

$$j = \sqrt{-1}. \quad (1.2)$$

On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes :

$$\mathbb{C} = \{z ; z = x + jy, x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\} \quad (1.3)$$

1.2 Représentation cartésienne.

La représentation $z = x + jy$ d'un nombre complexe z est une représentation cartésienne :

x est la partie réelle de z et on note : $x = \text{Re}(z)$

y est la partie imaginaire de z et on note : $y = \text{Im}(z)$

Si M est un point du plan xOy défini par ses coordonnées x et y alors que le nombre complexe $z = x + jy$ définit aussi le point M . z s'appelle *l'affixe* de M et M est l'image de z dans le plan xOy .

1.3 Représentation polaire.

Le plan complexe est l'ensemble des points M d'affixe $z = x + jy$. On pourra remarquer qu'il y a une parfaite correspondance entre le plan vectoriel muni d'un repère orthonormé et le plan complexe.

Soient $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ deux vecteurs unitaires portés par les axes Ox et Oy respectivement, et $M(x, y)$ un point du plan complexe. $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ (figure.1)

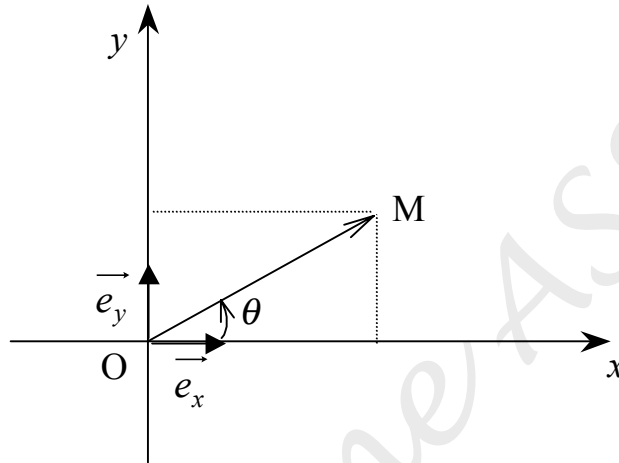


Figure1.1 : plan complexe

θ est l'angle que fait le vecteur $\vec{OM}$ avec l'axe Ox et r la norme de $\vec{OM}$;
 $r = |\vec{OM}|$ donc :
 $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$
 et le nombre complexe s'écrit :
 $z = x + jy = r \cos \theta + jr \sin \theta$

$$z = r (\cos \theta + j \sin \theta) \quad (1.4)$$

cet écriture est une représentation trigonométrique (ou polaire) du nombre complexe.

1.4 Représentation exponentielle.

En utilisant les formules d'Euler :

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} ; \quad \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \quad (1.5)$$

on obtient :

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta$$

ce qui nous donne une représentation exponentielle de z :

$$z = r e^{j\theta} \quad (1.6)$$

1.5 Module et argument.

La quantité r est le module du vecteur $\overrightarrow{OM}$; r est donc le module de z : $r = |z|$ et θ est l'argument de z : $\theta = \arg(z)$ Si $z = x + jy$ et puisque $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ alors :

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.7)$$

$$\theta = \arg(z) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1.8)$$

Remarque : Pour les nombres imaginaires pur $x = 0 \Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{2}$
et pour les réels pur $y = 0 \Rightarrow \theta = 0$ si $x > 0$ et $\theta = \pi$ si $x < 0$

1.5.1 Propriétés

1. $|z_1 \cdot z_2 \dots z_m| = |z_1| \cdot |z_2| \dots |z_m| \Rightarrow |z^n| = |z|^n$
2. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
3. $\arg(z_1 \cdot z_2 \dots z_m) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + \dots + \arg(z_m) \Rightarrow \arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$
4. $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$
5. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$
6. $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$

1.6 Cojugué d'un nombre complexe

C'est le nombre complexe ayant même module mais l'argument opposé.

On note le conjugué d'un nombre complexe $z = x + jy$ par $\bar{z}$;

$$\begin{aligned} \bar{z} &= x - jy \\ &= r(\cos \theta - j \sin \theta) \\ &= r e^{-j\theta} \end{aligned} \quad (1.9)$$

1.6.1 Propriétés

1. $\forall z \in \mathbb{C} : \overline{(\bar{z})} = z$
2. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \overline{(z_1 \pm z_2)} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
3. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \overline{(z_1 \cdot z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
4. $\forall z \in \mathbb{C} : \overline{z^n} = (\bar{z})^n$
5. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
6. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2j}$
7. si $z = x + jy$ alors $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

1.7 Opérations sur les nombres complexes.

L'ensemble des nombres complexes muni de l'addition et de la multiplication comme sera défini plus bas détermine un corps commutatif.

1.7.1 Egalité :

$\forall (z = x + jy) \in \mathbb{C} \quad \forall (z' = x' + jy') \in \mathbb{C}$ si $z = z' \implies x = x'$ et $y = y'$ et par suite $|z| = |z'|$ et $\arg(z) = \arg(z')$.

1.7.2 Addition et soustraction.

Soient deux nombres complexes : $z_1 = x_1 + jy_1$ et $z_2 = x_2 + jy_2$. On a :

$$Z = z_1 + z_2 = (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

$$\implies |Z| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \text{ et } \arg Z = \text{Arctg} \left(\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} \right)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + jy_1) - (x_2 + jy_2) = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

$$\text{Par exemple } (1 - j) + (5 + 3j) = 6 + 2j$$

$$(3 + 4j) - (1 + 3j) = 2 + j$$

Propriétés de l'addition

1. L'addition des nombres complexes est commutative : $\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall z' \in \mathbb{C}$ on a

$$z + z' = z' + z$$

2. L'addition dans $\mathbb{C}$ est associative : $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}$ on a

$z +$

$$(z' + z'') = (z + z') + z'' = z + z' + z''$$

3. Le nombre zéro est l'élément neutre : $0 = 0 + j0$; $\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z$

1.7.3 Multiplication et division.

Soient deux nombres complexes : $z_1 = x_1 + jy_1$ et $z_2 = x_2 + jy_2$

Le produit effectué directement donne :

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) = x_1 \cdot (x_2 + jy_2) + jy_1 \cdot (x_2 + jy_2)$$

$$= x_1x_2 - y_1y_2 + j(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\text{et on a : } |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \text{ et } \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

En effet :

$$z_1 = r_1 e^{j\theta_1} \text{ et } z_2 = r_2 e^{j\theta_2} \implies z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{j\theta_1} e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}.$$

La division donne :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}.$$

$$\implies \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ et } \arg \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

Remarque : On peut exprimer le nombre complexe $Z = \frac{z_1}{z_2}$ sous la forme :

$$Z = X + jY :$$

• Soit en calculant la quantité : $\frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + j \sin(\theta_1 - \theta_2)]$

• Soit en multipliant par $\overline{z_2}$ le numérateur et le dénominateur :

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{(x_1 + jy_1) \cdot (x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2) \cdot (x_2 - jy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + j(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = X + jY$$

propriétés de la multiplication

1. La multiplication des nombres complexes est commutative : $\forall z_1 \in \mathbb{C} \forall z_2 \in \mathbb{C}$
on a : $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
2. La multiplication des complexes est associative : $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ on a :
 $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$
3. Le nombre 1 est l'élément neutre pour la multiplication : $\forall z \in \mathbb{C} ; 1 \cdot z = z \cdot 1 = z$
4. La multiplication dans $\mathbb{C}$ est distributive par rapport à l'addition : $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ on a :
 $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$
5. $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\} , \exists z' \in \mathbb{C} ; z' \cdot z = 1 \implies z' = \frac{1}{z}$

1.7.4 Nombres complexes particuliers.

- $1 = 1.0 + j.0 \implies |1| = 1 , \arg(1) = 0 \pm 2k\pi \implies 1 = \exp(\pm 2jk\pi)$
- $j = 0.1 + j.1 \implies |j| = 1 , \arg(j) = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi \implies j = \exp(j(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi))$
- $-j = 1/j \implies |1/j| = 1 , \arg(1/j) = -\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi \implies 1/j = \exp(-j(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi))$

1.7.5 Rotation.

Soit $M(x, y)$ un point d'affixe $z = x + jy = re^{j\theta}$. Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est aussi caractérisé par z , La multiplication par le nombre complexe $a = e^{j\alpha}$ nous donne le nombre $az = re^{j(\theta+\alpha)}$ tel nombre complexe caractérise le vecteur $\overrightarrow{ON}$ de même module que $\overrightarrow{OM}$ mais l'angle que fait $\overrightarrow{ON}$ avec Ox est $\alpha + \theta$ ce qui veut dire que la multiplication par un nombre complexe de module 1 et d'argument α entraîne la rotation du vecteur image d'un angle α .

En particulier la multiplication par j entraîne une rotation de $\pi/2$ et la multiplication par (-1) entraîne la rotation de π .

1.8 Formule de De Moivre.

Soit $z = e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$
 $z^n = (e^{j\theta})^n = (\cos \theta + j \sin \theta)^n$
 or $(e^{j\theta})^n = e^{jn\theta} = \cos n\theta + j \sin n\theta$
 et, alors :

$$(\cos \theta + j \sin \theta)^n = \cos n\theta + j \sin n\theta \quad (1.10)$$

Cette formule s'appelle formule de De Moivre .

1.9 Racines d'un nombre complexe

Un nombre complexe ω est appelé racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe z si $\omega^n = z$ ou bien si $\omega = \sqrt[n]{z}$. D'après la formule de De Moivre si ω est de la forme : $\omega = \rho(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ et $z = r(\cos \theta + j \sin \theta)$ donc $\omega^n = z$ entraîne $r(\cos \theta + j \sin \theta) = \rho^n(\cos \varphi + j \sin \varphi)^n = \rho^n(\cos n\varphi + j \sin n\varphi)$.

L'égalité dans $\mathbb{C}$ entraîne :

$$\cos \theta = \cos n\varphi \text{ et } \sin \theta = \sin n\varphi \implies n\varphi = \theta + 2k\pi$$

d'où :

$$\rho = \sqrt[n]{r} \text{ et } \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \text{ avec } k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

Donc φ peut prendre n valeurs : φ_k ; $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ et par suite il existe dans $\mathbb{C}$ n racines nième d'un nombre complexe z :

$$\begin{aligned} \omega_k &= \sqrt[n]{r} [\cos \varphi_k + j \sin \varphi_k] \\ \varphi_k &= \frac{\theta + 2k\pi}{n} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Par exemple : l'unité a deux racines carrées : $\omega_0 = 1$ et $\omega_1 = -1$ et trois racines cubiques :

en effet $z = 1$ est un nombre complexe de module $r = 1$ et d'argument $\theta = 0$

les racines cubiques sont ω_k avec $k = 0, 1$ et 2 . $\varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{0 + 2k\pi}{3}$ donc :

$$\text{Pour } k = 0, \varphi_0 = 0 \implies \omega_0 = 1$$

$$\text{pour } k = 1, \varphi_1 = \frac{2\pi}{3} \implies \omega_1 = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Pour } k = 2, \varphi_2 = \frac{4\pi}{3} \implies \omega_2 = \left(\cos \frac{4\pi}{3} + j \sin \frac{4\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

D'une façon générale les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité sont données par la formule :

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + j \sin \frac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, 2 \dots n-1 \quad (1.12)$$

1.10 EXERCICES

Exercice 1

1) Trouver l'ensemble des valeurs de z tels que : $\left| \frac{z-3}{z+3} \right| = 2$

Exercice 2

1) Trouver les racines carrées de $z = -15 - 8j$

2) Résoudre l'équation : $z^2 + (2j-3).z + 5-j = 0$

3) Montrer que les racines de l'équation : $(z+1)^5 + z^5 = 0$ se trouvent sur une droite .

Exercice 3

Si u est une racine de l'unité, autre que 1, de $z^n = 1$, Calculer l'expression : $E = 1 + u + u^2 + \dots + u^{n-1}$.

Exercice 4

1) Déterminer z de manière que $z, 1/z$ et $(1-z)$ aient le même module.

2) Si z et z' sont deux nombres complexes de module 1, montrer que $\frac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.

3) Si $z + 1/z = 2 \cos t$ où t est un réel, calculer $z^n + 1/z^n$.

Exercice 5

- 1) Calculer le module et l'argument du nombre complexe . $z = \frac{1 + j \tan \varphi}{1 - j \tan \varphi}$
- 2) En déduire les expressions de $\sin 2\varphi$, $\cos 2\varphi$ et $\tan 2\varphi$ en fonction de $\tan \varphi$
- 3) Calculer $\tan(\pi/8)$
- 4) Utiliser ces résultats ainsi que le changement de variable $u = \tan(x/2)$, pour

calculer l'intégrale $I = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x}$

Exercice 6

Sachant que $P(z) = 4z^3 - 6j\sqrt{3}z^2 - 3(3 + j\sqrt{3})z - 4 = 0$ possède une racine réelle ; résoudre dans l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 7

- 1) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z qui vérifient :
 $|1 + jz| = |1 - jz|$
- 2) Soit a un nombre réel. Montrer que les solutions z de l'équation (E) :
 $\left(\frac{1 + jz}{1 - jz}\right)^n = \frac{1 + ja}{1 - ja}$ sont des nombres réels.
- 3) Résoudre l'équation (E).

Exercice 8

m étant un paramètre réel, on considère le nombre complexe :

$$z_m = \frac{-\frac{1}{2} + m + j\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2} - m + j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

- 1) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de z_m .
- 2) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la partie réelle de z_m est nulle.
- 3) Calculer le module et l'argument de z_m pour chacune des valeurs de m obtenues.
- 4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation . $(z + j)^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}z_{-1}$. (z_{-1} désigne z_m pour $m = -1$)

Chapitre 2

FONCTION COMPLEXE D'UNE VARIABLE COMPLEXE

2.1 Définition :

Si à chaque nombre complexe z variable il correspond une ou plusieurs valeurs Z , nous dirons que Z est une fonction de z . En générale on appelle fonction complexe de la variable complexe z toute application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui fait associer à chaque nombre complexe z un nombre complexe Z tel que $Z = f(z)$:

$$z \in \mathbb{C} \xrightarrow{f} Z = f(z) \in \mathbb{C}$$

Exemples :

$$z \in \mathbb{C} \xrightarrow{f} Z = f(z) = z^3 + 2$$

$$z \in \mathbb{C} \xrightarrow{f} Z = f(z) = \cos z;$$

$Z = f(z)$ est un nombre complexe donc il s'écrit sous la forme :

$$Z = f(z) = P + jQ$$

Puisque $z = x + jy$ alors $P = P(x, y)$; $Q = Q(x, y)$. P est la partie réelle de Z et Q la partie imaginaire.

Exemple :

$$Z = f(z) = z^2 = (x + jy)^2 = x^2 - y^2 + 2jxy \text{ Donc } P = x^2 - y^2 \text{ et } Q = 2xy$$

2.2 Fonctions uniformes

Soit $f(z)$ une fonction complexe de la variable complexe z . On dit que $f(z)$ est une fonction uniforme si à chaque valeur de la variable z , la fonction $f(z)$ peut prendre une seule valeur $\omega = f(z)$. Si non la fonction est dite *multiforme*. Par exemple $f(z) = z^2$ est une fonction uniforme, car pour $z = z_0$ $f(z)$ prend la valeur unique z_0^2 . La fonction $f(z) = \sqrt{z}$ est multiforme car à chaque valeur z_0 on a deux valeurs $+\sqrt{z}$ et $-\sqrt{z}$. Dans la suite la notation *fonctions* représente les fonctions uniformes.

2.3 Fonctions inverses :

Si $Z = f(z)$ est une fonction de la variable complexe z . On peut définir la fonction $z = f^{-1}(Z)$. z est alors la fonction *inverse* de Z . Notons que la fonction inverse d'une fonction uniforme n'est pas nécessairement uniforme. Ainsi $f(z)$ et $f^{-1}(z)$ sont des fonctions inverses l'une de l'autre.

2.4 Limites

2.4.1 Définition

On dit que le nombre complexe $\ell = a + jb$ est la limite de la fonction $f(z)$ au point z_0 si à tout nombre positif ε on peut trouver un nombre positif α , tel que si $|z - z_0| < \alpha$ alors que $|f(z) - \ell| < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0; |z - z_0| < \alpha \implies |f(z) - \ell| < \varepsilon \quad (2.1)$$

On note :

$$\ell = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \quad (2.2)$$

Comme $f(z) = P(x, y) + jQ(x, y)$ donc

$$a = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} P(x, y) \quad \text{et} \quad b = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} Q(x, y) \quad (2.3)$$

2.4.2 Propriétés :

Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions de la variable complexe z et soient ℓ et m les limites respectives au point z_0 alors on a :

1. $\lim_{z \rightarrow z_0} (f \pm g) = \ell \pm m$
2. $\lim_{z \rightarrow z_0} (f \cdot g) = \ell \cdot m$
3. $\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\ell}{m}$ si $m \neq 0$
4. si λ est un réel constante alors : $\lim_{z \rightarrow z_0} (\lambda f) = \lambda \ell$

2.5 Continuité

2.5.1 Définition

Soit une fonction complexe $f(z)$ uniforme définie au voisinage d'un point z_0 . La fonction $f(z)$ est dite fonction continue au point z_0 si :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \quad (2.4)$$

Les trois conditions suivantes sont simultanément remplies :

1. La limite de $f(z)$ au point z_0 existe c'est-à-dire $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \ell$ existe et finie
2. $f(z)$ est définie au point z_0 c'est-à-dire $f(z_0)$ existe
3. $\ell = f(z_0)$

Exemple

Soit la fonction $f(z) = \exp(z)$ on a

$$\ell = \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \exp(z) = 1 \text{ et } f(0) = \exp(0) = 1$$

donc cette fonction est continue au point $z = 0$

Remarques

1. Une fonction $f(z)$ est dite continue dans un domaine du plan complexe si elle est continue dans tous les points de ce domaine.
2. Si la fonction $f(z)$ est continue au point z_0 alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que pour } |z - z_0| < \delta \text{ on a } |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad (2.5)$$

2.5.2 Prolongement par continuité

Si la fonction $f(z)$ admet une limite ℓ en un point z_0 mais n'est pas définie dans ce point alors on peut associer à $f(z)$ une fonction $\varphi(z)$ telle que $\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = \ell = \varphi(z_0)$. C'est-à-dire que la fonction associée soit continue au point z_0 . dans ce cas on dit que la fonction $f(z)$ est prolongeable par continuité.

2.6 EXERCICES**Exercice 1**

Calculer :

- a) $\sin j$ b) $\cosh(2 - 3j)$ c) $\sinh(1 + j)$
 d) $\arg(z^3)$ e) $\arg(\sqrt{z - 8})$

Exercice 2

Soit $z = x + i.y$ un nombre complexe quelconque. On appelle $\exp(z)$ le nombre complexe de module e^x et d'argument y .

- 1) Montrer que pour tout z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z + z') = \exp(z) \cdot \exp(z')$
- 2) Montrer que : $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$
- 3) Démontrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$
- 4) Démontrer : $\forall z \in \mathbb{C} \quad |\exp(z)| \leq \exp(|z|)$
- 5) Résoudre les équations : $\exp(z) = -1$; $\exp(z) = 3$; $\exp(z) = j$.

Exercice 3

Démontrer qu'une fonction polynôme en z est continue dans tout le plan complexe.

Exercice 4

On considère la fonction f définie par :

$$f(z) = \frac{z^2 + 9}{z - 3j} \quad \text{si } z \neq 3j$$

$$f(3j) = j$$

- 1) Quelle est la limite de $f(z)$ quand $z \rightarrow 3j$
- 2) f est-elle continue au point $z = 3j$

Exercice 5

En utilisant la notation complexe, démontrer que la fonction $f(z) = \frac{1}{2j} \left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z} \right)$ n'a pas de limite au point $z = 0$.

Exercice 6

Soit une fonction complexe d'une variable complexe : $f(z) = \frac{z^2 - 2jz - 1}{z^4 + 2z^2 + 1}$

- 1) Calculer la limite de $f(z)$ au point $z = j$
- 2) $f(z)$ est-elle continue en $z = j$
- 3) $f(z)$ est-elle prolongeable par continuité au point $z = j$

Chapitre 3

DÉRIVATION COMPLEXE

3.1 Définitions

3.1.1 Fonctions uniforme

Une fonction complexe est une fonction uniforme si à une valeur donnée de la variable complexe z , la fonction $f(z)$ à une valeur unique. Si non la fonction est multiforme par exemple $f(z) = z^3$ est uniforme mais la fonction $f(z) = \sqrt{z}$ est multiforme.

3.1.2 Domaines connexes

Soit une fonction $f(z)$, uniforme et définie dans un domaine D . Le domaine D est simplement connexe si et seulement si le segment de droite joignant deux points quelconques de D est entièrement dans D (figure 3.1a). Dans le cas contraire le domaine n'est pas connexe. Si D n'est simplement connexe mais peut être partagé en plusieurs domaines simplement connexes il s'appelle dans ce cas domaine multiplement connexe (figure 3.1b).

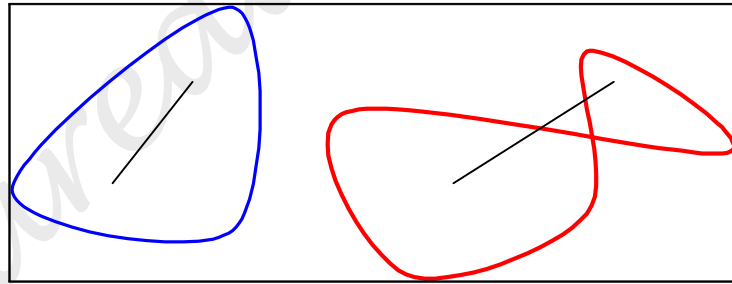


Figure 3.1 : Domaines

3.2 Dérivation complexe :

3.2.1 Définition :

Soit la fonction $f(z)$ définie et continue dans un domaine simplement connexe D . Si on donne à la variable z un accroissement Δz au voisinage d'un point z_0 , alors que la fonction subit de même un accroissement $\Delta f(z)$;

$$\Delta f = f(z + \Delta z) - f(z) \quad (3.1)$$

. Considérons la limite du rapport $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ lorsque l'accroissement Δz est infiniment petit. Cette limite si elle existe s'appelle dérivée de $f(z)$ au point z_0 et on la

note $f'(z_0)$.

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} \quad (3.2)$$

Autrement si $\Delta z = z - z_0$:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (3.3)$$

3.2.2 Fonctions analytiques

Une fonction complexe est définie généralement dans une portion du plan complexe et dans ce domaine la quantité Δz peut tendre vers zéro sur n'importe quel trajet défini par une courbe de la forme $y(x)$. La dérivée d'une fonction complexe, si elle existe, n'entraîne pas nécessairement que la fonction est dérivable sauf si cette dérivée est la même quel que soit le trajet suivi, et la fonction est dite *fonction analytique*. Autrement dit : une fonction complexe est analytique si et seulement si sa dérivée en un point est indépendante du chemin suivi.

3.3 Conditions de Cauchy-Riemann

3.3.1 Définition

Soit la fonction $f(z)$ définie et continue dans un domaine simplement connexe D , cette fonction s'écrit sous la forme : $f(z) = P(x, y) + jQ(x, y)$ où P et Q sont les parties réelle et imaginaire de $f(z)$ et elles sont continues dans D . On a $\Delta z = \Delta x + j\Delta y$ et de même $\Delta f(z) = \Delta P + j\Delta Q$. D'après la définition de la dérivée on écrit :

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta P + j\Delta Q}{\Delta x + j\Delta y} \quad (3.4)$$

Si on fait tendre Δz vers zéros suivant le chemin $x = cte$ alors $\Delta x = 0$, par suite :

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta P + j\Delta Q}{j\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} -j \frac{\Delta P}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta y}$$

Donc

$$f'(z) = \frac{\partial Q}{\partial y} - j \frac{\partial P}{\partial y} \quad (3.5)$$

Et si Δz tend vers zéro sur le trajet $y = cte$ c'est-à-dire $\Delta y = 0$ on trouve :

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P + j\Delta Q}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} + j \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta x}$$

Alors :

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + j \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (3.6)$$

La fonction $f(z)$ est analytique si la dérivée est la même quel que soit le chemin, donc pour que $f(z)$ soit analytique il faut que :

$$\frac{\partial Q}{\partial y} - j \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} + j \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ces conditions sont les conditions de Cauchy - Reimann (C.C.R.)

Remarques :

1. Les conditions de Cauchy-Reimann sont nécessaires mais pas suffisantes, il faut de plus que les dérivées partielles des parties réelle et imaginaire soient continues dans le domaine D .
2. Pour exprimer la fonction $f(x, y) = P(x, y) + jQ(x, y)$ à l'aide de la variable $z = x + jy$ il suffit de considérer $y = 0$ et remplacer x par z .

3.3.2 Fonctions Harmoniques :

Une fonction $u(x, y)$ à deux variables réelles est dite harmoniques si les dérivées partielles de deuxième ordre vérifient la relation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.8)$$

Si $f(z)$ est une fonction complexe analytique alors que ses parties réelle et imaginaire sont harmoniques.

En effet : $f(z) = P(x, y) + jQ(x, y)$ est analytique alors P et Q vérifient les C.C.R. donc :

$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}$ ce qui montre directement que $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$ alors P est une fonction harmonique. De même pour Q .

Remarque

Connaissant une fonction harmonique $X(x, y)$ on peut déterminer une deuxième fonction harmonique $Y(x, y)$ d'une manière que la fonction $F = X + jY$ ou la fonction $G = Y + jX$ soient analytiques.

Exemple :

Soit $X = x^2 - y^2$. Vérifions que X est harmonique, cherchons une fonction $Y(x, y)$ telle que $f(z) = X + jY$ soit analytique et exprimons f à l'aide de la variable z .

$$\text{on a : } \frac{\partial X}{\partial x} = 2x \text{ et } \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial X}{\partial y} = -2y \text{ et } \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = -2$$

$$\implies \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0 \implies X(x, y) \text{ est harmonique}$$

Si $f(z) = X + jY$ est une fonction analytique alors X et Y vérifient les C.C.R. donc :

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 2x = \frac{\partial Y}{\partial y} \implies Y(x, y) = \int 2x \, dy = 2xy + \varphi(y)$$

$$\text{et } \frac{\partial X}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial Y}{\partial x} = -2y - \varphi'(y) \text{ donc } \varphi'(y) = 0 \implies \varphi(y) = \text{cte}$$

$$\text{et on trouve : } f(z) = X + jY = x^2 - y^2 + 2jxy + C$$

pour exprimer $f(z)$ à l'aide de la variable z on prend $y = 0$ et on remplace x par z et on obtient : $f(z) = z^2$

3.4 Différentielle :

Soit $\Delta z = dz$ un accroissement infiniment petit donné à la variable z , alors $\Delta f = f'(z)\Delta z + \varepsilon\Delta z$ (d'après la formule d'accroissement fini). Si ε tend vers zéro et Δz tend vers dz alors Δf tend vers df telle que $df = f'(z)dz$. La quantité df s'appelle la différentielle de f .

3.5 Règles de dérivations :

Les règles de dérivations d'une fonction complexe sont identiques aux règles de dérivations pour une fonction réelle. Dans la suite on rappelle quelques-uns :

1. *somme* : $[f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z)$
2. *multiplication par constante* : $[k.f(z)]' = k.f'(z)$
3. *produit* $[f(z).g(z)]' = f'(z).g(z) + f(z).g'(z)$
4. *puissance* : $[f(z)^n]' = n.f'.f^{n-1}$
5. *fraction* : $\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'.g - g'.f}{g^2}$
6. *fonction composée* : $f(g(z)) = f'(g).g'(z)$
7. *fonction inverse* : $[f^{-1}]' = [f']^{-1}$

Remarques :

- Si $\omega = f(z)$ est une fonction analytique sa fonction réciproque $z = f^{-1}(\omega)$ n'est pas nécessairement analytique
- On note la dérivée d'ordre n de la fonction $f(z)$ par : $f^{(n)}(z) = \frac{d^n f}{dz^n}$
- On peut appliquer le règle d'Hospital pour chercher la limite d'une fraction f/g si les fonctions f et g sont analytiques

3.6 Fonctions complexes élémentaires :

3.6.1 Fonctions polynômes :

Sont de la forme : $f(z) = a_n z^n$ où les coefficients a_n sont des complexes. Quel que soit l'entier n , z^n est une fonction analytique et par suite la fonction polynôme est analytique.

3.6.2 Fonction exponentielle :

$f(z) = \exp(z)$; $z = x + jy$ alors

$$\exp(z) = \exp(x + jy) = \exp(x) \cdot \exp(jy) = \exp(x) \cdot [\cos y + j \sin y] \quad (3.9)$$

la partie réelle est $P(x, y) = \exp(x) \cdot \cos y$

et la partie imaginaire est $Q(x, y) = \exp(x) \cdot \sin y$

Les dérivées partielles sont ;

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \exp(x) \cos y \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\exp(x) \sin y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \exp(x) \sin y \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \exp(x) \cos y$$

On remarque que ces dérivées partielles sont continues dans tout le plan complexe et elles vérifient les C.C.R. donc la fonction $f(z) = \exp(z)$ est une fonction holomorphe

3.6.3 Fonction Logarithme :

$f(z) = \log(z) = \log(x + jy)$

Sous la forme polaire la variable z s'écrit : $z = r \cdot \exp(j\theta)$ alors :

$$f(z) = \log(r) + \log(\exp(j\theta))$$

mais puisque $\exp(j\theta) = \exp[j(\theta + 2k\pi)]$, il existe donc plusieurs valeurs de $\log(z)$ qui s'appellent *déterminations*, donc c'est une fonction multiforme :

$$\log(z) = \text{Log}(r) + j\theta + 2jk\pi \quad (3.10)$$

En particulier la quantité :

$$\text{Log}(z) = \text{Log}(r) + j\theta \quad (3.11)$$

s'appelle **détermination principale**

3.6.4 Fonctions trigonométriques

Fonction cosinus :

$f(z) = \cos z = \cos(x + jy) = \cos x \cos(jy) - \sin x \sin(jy)$ donc :

$$\cos z = \cos x \cdot \cosh y - j \sin x \sinh y \quad (3.12)$$

Les dérivées partielles sont :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\sin x \cosh y \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \cos x \sinh y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\cos x \sinh y \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -\sin x \cosh y$$

Alors $\cos z$ est une fonction analytique.

Fonction sinus :

$$f(z) = \sin z = \sin(x + jy) = \sin x \cos(jy) + \cos x \sin(jy) \quad \text{donc :}$$

$$\sin z = \sin x \cdot \cosh y + j \cos x \sinh y \quad (3.13)$$

Les dérivées partielles sont :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \cos x \cosh y \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \sin x \sinh y \quad ;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\sin x \sinh y \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \cos x \cosh y$$

Et de même c'est une fonction analytique.

Remarque : Les fonctions $\tan(z)$ et $\arctan(z)$ se définissent de même manière que les fonctions réelles.

3.6.5 Fonctions hyperboliques

Sinus hyperbolique :

$$f(z) = \sinh(z) = \sinh(x + jy) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}$$

$$= \frac{[\exp(x) \cdot \exp(jy)] - [\exp(-x) \cdot \exp(-jy)]}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \{ \exp(x) \cdot [\cos y + j \sin y] - \exp(-x) \cdot [\cos y - j \sin y] \}$$

$$= \frac{1}{2} [\cos y (\exp(x) - \exp(-x)) + j \sin y (\exp(x) + \exp(-x))] \Rightarrow$$

$$\sinh z = \sinh x \cos y + j \cosh x \sin y \quad (3.14)$$

Cosinus hyperbolique :

$$f(z) = \cosh z = \cosh(x + jy) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}$$

$$= \frac{[\exp(x) \cdot \exp(jy)] + [\exp(-x) \cdot \exp(-jy)]}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \{ \exp(x) \cdot [\cos y + j \sin y] + \exp(-x) \cdot [\cos y - j \sin y] \}$$

$$= \frac{1}{2} [\cos y (\exp(x) + \exp(-x)) + j \sin y (\exp(x) - \exp(-x))] \Rightarrow$$

$$\cosh(z) = \cosh x \cos y + j \sinh(x) \sin y \quad (3.15)$$

On démontre que les fonction hyperboliques sont aussi des fonctions analytiques.

3.6.6 Fonctions inverses :

$$\begin{aligned}\arcsin z &= \frac{1}{j} \ln (jz + \sqrt{1 - z^2}) & \arccos z &= \frac{1}{j} \ln (z + \sqrt{z^2 - 1}) \\ \arctan z &= \frac{1}{2j} \ln \left(\frac{1 + jz}{1 - jz} \right) & \operatorname{arccatanz} &= \frac{1}{2j} \ln \left(\frac{z + j}{z - j} \right) \\ \arg \sinh z &= \ln (z + \sqrt{1 + z^2}) & \arg \cosh z &= \ln (z + \sqrt{z^2 - 1}) \\ \arg \tanh z &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + z}{1 - z} \right)\end{aligned}$$

3.7 Dérivés usuelles :

$\mathbf{f(z)}$	$\frac{df}{dz}$	■	$\mathbf{f(z)}$	$\frac{df}{dz}$
z^n	nz^{n-1}	■	a^z	$a^z \ln a$
$\cos kz$	$-k \sin kz$	■	$\sin az$	$a \cos az$
$\exp(az)$	$a \exp(az)$	■	$\log z$	$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \exp(-j\theta)$
$\cot(z)$	$-\frac{1}{\sin^2 z}$	■	$\tan z$	$1 + \tan^2 z = \frac{1}{\cos^2 z}$
$\frac{1}{\cos z}$	$\frac{\tan z}{\cos^2 z}$	■	$\frac{1}{\sin z}$	$-\frac{\cot z}{\sin^2 z}$
$\arcsin z$	$\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$	■	$\arccos z$	$-\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$
$\arctan z$	$\frac{1}{1 + z^2}$	■	$\operatorname{arccot} z$	$-\frac{1}{1 + z^2}$
$\sinh z$	$\cosh z$	■	$\cosh z$	$\sinh z$
$\tanh z$	$\frac{1}{\cosh^2 z}$	■	$\arg \sinh z$	$\frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}$
$\arg \cosh$	$\frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}$	■	$\arg \tanh z$	$\frac{1}{1 - z^2}$

3.8 EXERCICES

Exercice 1

Démontrer que la fonction $f(z) = z^3$ est analytique

Exercice 2

Les parties réelles et imaginaires des fonctions suivantes vérifient-elles les C.C.R :

a) $\exp(3z)$ b) $\sin(az)$ c) $\ln(z^2)$

Exercice 3

Exprimer Les C.C.R en coordonnées polaires

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ la fonction $f(z) = z^n$ est analytique.

Exercice 4

Soient X et Y deux fonctions harmoniques dérivables de x et y .

On définit la fonction : $f = P + jQ$ où :

$$P = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}$$

f est-elle analytique/

Exercice 5

Vérifier que les fonctions suivantes sont holomorphes et trouver leurs dérivées :

a) $f(x, y) = e^{-y}(\cos x + j \sin x)$ b) $f(x, y) = \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y$

Exercice 6

Vérifier, dans les cas suivants, que la fonction $P(x, y)$ est harmonique. Trouver une fonction $Q(x, y)$ de manière que la fonction $f = P + jQ$ soit analytique et exprimer f à l'aide de la variable z :

- a) $P(x, y) = x^3 - 3xy^2$
- b) $P(x, y) = 2e^x \sin y$
- c) $P(x, y) = \arctan(y/x)$.
- d) $P(x, y) = 2x(1 - y)$
- e) $P(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta$

Chapitre 4

INTÉGRATION COMPLEXE

4.1 Définition

Soit $f(z)$ une fonction complexe d'une variable complexe définie et continue dans un domaine simplement connexe D , et soit (C) une courbe continue et incluse dans D d'extrémités $A(z_A)$ et $B(z_B)$.

Partageons la courbe (C) en n segments curvilignes arbitraires dont les extrémités sont caractérisées par les affixes : $z_0 = z_A, z_1, z_2, \dots, z_n = z_B$. Considérons un point P_m d'un segment quelconque tel que $z_{m-1} < z_P < z_m$. et pour le quel la fonction vaut $f(z_P)$.

Considérons la somme : $S_n = \sum_{m=1}^n f(z_p) \Delta(z_m)$ où $\Delta z_m = z_m - z_{m-1}$

Si on fait augmenter indéfiniment le nombre des segments curvilignes (n), la largeur de l'intervalle $[z_{m-1}, z_m]$ décroît de même indéfiniment et tend vers une quantité infiniment petite dz d'une façon qu'on peut confondre les points $M(z_{m-1})$, $P(z_p)$, et $N(z_m)$. et le signe somme devient le signe d'intégration alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n f(z_p) \Delta(z_m) = \int_C f(z) dz$$

L'intégrale $I = \int_C f(z) dz$ est une intégrale curviligne le long de la courbe C de la fonction complexe $f(z)$.

Si $f(z)$ est de la forme : $f(z) = P(x, y) + jQ(x, y)$ alors l'intégrale s'écrit :

$$I = \int_C f(z) dz = \int_C (P + jQ)(dx + jdy) = \int_C [Pdx - Qdy + jQdx + jPdy]$$

d'où :

$$\int_C f(z) dz = \int_C Pdx - Qdy + j \int_C Qdx + Pdy \quad (4.1)$$

Donc l'intégrale complexe est une combinaison de deux intégrales curvilignes réelles.

4.2 Propriétés :

a) $\int_C [\lambda f(z) + \mu g(z)] dz = \lambda \int_C f(z) dz + \mu \int_C g(z) dz$ avec λ et μ sont deux constantes complexes.

b) Si $C = C_1 \cup C_2 \implies \int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$

c) Si $\widehat{AB}$ est une courbe quelconque et E un point de $\widehat{AB}$ alors :

$$\int_{AB} f(z) dz = \int_{AE} f(z) dz + \int_{EB} f(z) dz$$

d) $\int_{AB} f(z) dz = - \int_{BA} f(z) dz$

4.2.1 Théorème de Cauchy

Si $f(z)$ est une fonction analytique sur une courbe fermée C limitant un domaine D alors $\int_C f(z) dz = 0$

En effet :

$f(z) = P(x, y) + jQ(x, y)$ est une fonction analytique donc les fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ vérifient les C.C.R.

D'autre part la formule de Green - Riemann nous donne pour les deux intégrales de la formule (4.1) :

$$\begin{aligned} \int_C P dx - Q dy &= \iint_D \left(-\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0 \\ \int_C Q dx + P dy &= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = 0 \end{aligned}$$

Ce qui montre le théorème.

4.2.2 Théorème

Si f est une fonction holomorphe sur un domaine D simplement connexe, alors $\int_{AB} f(z) dz$ est indépendante du chemin d'intégration situé dans D et joignant les points A et B .

En effet, Soit C une courbe fermée passant par A et B , les points A et B décomposent la courbe C en deux arcs $\widehat{AB}$ et $\widehat{BA}$ donc :

$$\int_C f(z) dz = \int_{\widehat{AB}} f(z) dz + \int_{\widehat{BA}} f(z) dz = 0 \text{ car } f \text{ est holomorphe donc les deux}$$

intégrales sur AB suivant les deux trajets sont égales.

4.2.3 Généralisation du théorème de Cauchy

On admet le théorème suivant :

Si f est holomorphe à l'intérieur et sur la frontière d'une région limitée par n contours fermés simples intérieures de C et n'ayant pas des points communs entre eux, on a :

$$C = \bigcup_{k=1}^n C_k \implies \int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz \quad (4.2)$$

4.3 Formules intégrales de Cauchy

4.3.1 Formule Majorante

Soit $f(z)$ une fonction à variable complexe définie et intégrable sur un contour (C) de longueur ℓ . Soit M le maximum de $f(z)$ sur (C) ; $\forall z |f(z)| \leq M$. On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_n f(z) \Delta z_n \right| \leq M \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_n \Delta z_n \right| = M \cdot \ell \text{ d'où :}$$

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq M \cdot \ell \quad (4.3)$$

Cette inégalité s'appelle la formule majorante .

4.3.2 Première formule intégrale de Cauchy

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans une région D limitée par le contour fermé C , et soit z_0 un point de D . La fonction $g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$ n'est pas holomorphe dans D .

Considérons le cercle γ de centre z_0 et de rayon infiniment petit ρ , la fonction $g(z)$ est alors holomorphe dans le domaine C_1 entre C et γ . On a $C = C_1 \cup \gamma$ donc :

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \text{ car elle est holomorphe}$$

sur C_1 . On a :

$$\begin{aligned} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0) + f(z_0)}{z - z_0} dz \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + \int_{\gamma} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz \end{aligned}$$

γ est le cercle de centre z_0 et de rayon ρ donc $|z - z_0| = \rho$ sur γ on a $z - z_0 = \rho \exp(j\theta) \implies dz = \rho j \exp(j\theta) \cdot d\theta$ donc

$$\int_{\gamma} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = f(z_0) \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = f(z_0) \int_{\gamma} \frac{\rho j \exp(j\theta) \cdot d\theta}{\rho \exp(j\theta)} = j f(z_0) \int_0^{2\pi} d\theta = 2j\pi f(z_0).$$

d'autre part

$$\int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{\rho \exp(j\theta)} \rho j \exp(j\theta) d\theta = j \int_{\gamma} (f(z) - f(z_0)) d\theta \rightarrow 0$$
 si $\rho \rightarrow 0$
 et on trouve :

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2j\pi f(z_0) \quad (4.4)$$

Cette relation est la formule intégrale de Cauchy.

4.3.3 Dérivées en un point d'une fonction holomorphe ; formule générale de Cauchy

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe à l'intérieur d'un contour fermé C et soient z_0 et $z_1 = z_0 + \Delta z$ deux points de la région limitée par C . D'après la formule intégrale de Cauchy on a :

$$\begin{aligned}
 \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= 2j\pi f(z_0) \quad \text{et} \quad \int_C \frac{f(z)}{z - z_1} dz = 2j\pi f(z_1) \\
 \Delta f &= f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \frac{1}{2j\pi} \int_C \left(\frac{f(z)}{z - z_1} - \frac{f(z)}{z - z_0} \right) dz \\
 &= \frac{1}{2j\pi} \int_C \left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_0} \right) f(z) dz = \frac{1}{2j\pi} \int_C \left(\frac{z - z_0 + \Delta z + z_0 - z}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} \right) f(z) dz \\
 &= \frac{1}{2j\pi} \int_C \frac{\Delta z f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz \\
 \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= f'(z_0) = \frac{1}{2j\pi} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz = \frac{1}{2j\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz
 \end{aligned}$$

d'où :

$$f'(z_0) = \frac{1}{2j\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

de même on démontre la formule généralisée de Cauchy :

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2j\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (4.5)$$

4.4 EXERCICES

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$a) \int_C (2z + 1) \bar{z} dz \quad C = \{z, |z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \pi\}$$

$$\text{b) } \int_C \operatorname{Im}(z) dz \quad C = \{(x, y) ; y = 2x^2, 0 \leq x \leq 1\}$$

$$\text{c) } \int_C \operatorname{Re}(z + z^2) dz \quad C = \{(x, y) ; y = 2x^2, 0 \leq x \leq 1\}$$

$$\text{d) } \int_C \bar{z} dz \quad C \text{ est le demi cercle unité avec } y \geq 0$$

Exercice 2

Intégrer la fonction $f(z) = y - x - 3x^2j$ sur le segment de droite allant de $z = 0$   $z = 1 + j$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_C \frac{z^2}{z - 2j} dz & C : |z| = 1 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{b) } \int_C \frac{z^2}{z - 2j} dz & C : |z| = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{c) } \int_C \frac{\sin z}{z + j} dz & C : |z| = 2 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{d) } \int_C \frac{dz}{(z - 1)(z + 3)} & C : |z| = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{e) } \int_C \frac{z}{2z - 5} dz & C : |z - 3| = 2 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{f) } \int_C \frac{\sinh 2z + \cos 3z}{(z + 4)(z - 3j)} dz & C : |z| = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{g) } \int_C \frac{\exp(z) + z \sinh z}{(z - j\pi)^3} dz & C : |z| = 4 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{h) } \int_C \frac{\sinh z}{z^4} dz & C : |z| = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{i) } \int_C \frac{\sin^5 z}{z + \pi/4} dz & C : |z| = 1 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{j) } \int_C \frac{\exp(z) + z}{(z - 1)^4} dz & C : |z| = 2 \end{array}$$

Chapitre 5

SÉRIES COMPLEXES

5.1 Généralités sur les séries :

5.1.1 Définitions

On appelle série à termes complexes une série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ où $u_n = a_n + jb_n$ avec a_n et b_n sont les termes généraux des suites numériques réelles.

Soient $u_0, u_1, \dots, u_n \in \mathbb{C}$. Le symbole $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est défini comme la limite (si elle existe) de la suite des sommes partielles : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$: $S_0 = u_0$; $S_1 = u_0 + u_1$; $S_2 = u_0 + u_1 + u_2 \dots$

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |S - S_n| = 0$ on dit que la série est *convergente* et a pour somme S .

On dit que la série $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge *absolument* si $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ converge. La convergence absolue entraîne la convergence simple par l'inégalité

$$\left| \sum_{n \geq 0} u_n \right| \leq \sum_{n \geq 0} |u_n| \quad (5.1)$$

alors que l'inverse est en général faux comme le montre la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ qui converge simplement mais pas absolument dans ce cas la série est dite *semi-convergente*.

5.1.2 Résultats généraux utiles

a **Condition nécessaire de convergence** : pour que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge il est

nécessaire que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

b **Condition nécessaire et suffisante de convergence** : si la série des parties réelles $\text{Re}(u_n)$ et des parties imaginaires $\text{Im}(u_n)$ sont convergentes.

c **Condition nécessaire et suffisante de Cauchy** : la série $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge ssi la suite S_n des sommes partielles est une suite de Cauchy c. à. d. :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : p, q \geq N(\varepsilon) \implies |S_p - S_q| \leq \varepsilon \quad (5.2)$$

5.1.3 Séries à termes positifs

Condition nécessaire et suffisante de convergence :

Ssi $S_n \leq M$ avec M indépendant de n alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Comparaison des séries :

Soient deux séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$. Si l'on a pour $n \geq N$ l'inégalité $u_n \leq v_n$,

alors :

- * si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge,
- * si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Equivalence des séries :

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = \lambda \neq 0$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature (toutes deux divergentes ou toutes deux convergentes).

Comparaison à l'intégrale :

Soit $f(x)$ une fonction continue et monotone décroissante si $x \rightarrow +\infty$, alors

$$\sum_{n \geq N} f(n) \text{ et } \int_N^{\infty} f(x) dx \text{ sont de même nature.}$$

Séries de comparaison de Riemann :

La série $\sum_{n \geq N} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.

Règle de Cauchy :

Supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{1/n} = q$ alors

1. – si $q < 1$ la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge,
- si $q \geq 1$ la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

Règle de d'Alembert :

Supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ alors

- si $q < 1$ la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge,
- si $q \geq 1$ la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

5.1.4 Séries alternées

Une série est alternée si le produit $u_{n+1} \cdot u_n$ est négatif pour tout n ($\forall n : u_{n+1} \cdot u_n < 0$).

Soit u_n une série alternée telle que :

- i) $|u_n|$ est monotone décroissante,
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

alors elle converge et son reste $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$ est majoré par $|r_n| \leq |u_n|$

5.1.5 Séries de fonctions

On appelle série de fonctions une série $\sum_{n \geq 0} u_n(t)$ avec $u_n(t)$ est une fonction complexe donnée.

Soit $t \in [a, b]$ et la suite de fonctions $u_n(t)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [a, b]$ avec a et b bornés.

Convergence simple pour $t = t_0$:

On dit que $\sum_{n \geq 0} u_n(t)$ converge simplement en $t = t_0$ vers $S(t_0)$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, t_0) : n \geq N(\varepsilon, t_0) \implies \left| S(t_0) - \sum_{k=0}^n u_k(t_0) \right| \leq \varepsilon$$

Cette notion de convergence est locale, au point $t = t_0$ (en anglais “pointwise convergence”). En particulier la série $\sum_{k=0}^n u_k(t_0)$ est une série numérique puisque t est fixé à la valeur t_0 .

Convergence uniforme sur un compact $[a, b]$:

(On rappelle que sur dire que l'intervalle $[a, b]$ est compact est équivalent à dire qu'il est fermé et borné.)

La série $\sum_{n \geq 0} u_n(t)$ converge uniformément vers $S(t)$ pour t dans le compact $[a, b]$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : n \geq N(\varepsilon) \implies \left| S(t) - \sum_{k=0}^n u_k(t) \right| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [a, b]$$

Critère de convergence uniforme de Weierstrass :

Si $\forall t \in [a, b]$ on a $|u_n(t)| \leq M_n$ pour $n \geq N$ et si $\sum_{n \geq N} M_n < \infty$ alors

$\sum_{n \geq 0} u_n(t)$ converge uniformément si $t \in [a, b]$

Continuité de la somme :

Soit $S(t) = \sum_{n \geq 0} u_n(t)$, $t \in [a, b]$

◦ si les $u_n(t)$ sont continues pour $t \in [a, b]$

◦ si la série $\sum_{n \geq 0} u_n(t)$ converge uniformément pour $t \in [a, b]$

alors $S(t)$ est continue pour $t \in [a, b]$

Intégration terme à terme :

Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n(t)$ converge uniformément pour $t \in [a, b]$ alors on peut intégrer terme à terme et on a

$$[\alpha, t] \subseteq [a, b] \quad \int_{\alpha}^t S(x) dx = \sum_{n \geq 0} \int_{\alpha}^t u_n(x) dx$$

Dérivation terme à terme :

Sous les hypothèses suivantes :

◦ les $u_n(t)$ et les $u'_n(t)$ sont continues pour $t \in [a, b]$

◦ $\sum_{n \geq 0} u'_n(t)$ converge uniformément pour $t \in [a, b]$

alors les fonctions $S(t)$ et $S'(t)$ sont continues et on peut dériver la série terme à terme :

$$S'(t) = \sum_{n \geq 0} u'_n(t) \quad , \quad t \in [a, b]$$

5.1.6 Séries entières

Soit $\{a_n ; n \in \mathbb{N}\}$ une suite de nombres complexes et $z \in \mathbb{C}$ on appelle série entière (centrée sur le point $z = 0$) la série de la forme :

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots \quad (5.3)$$

On a les résultats :

Lemme d' Abel

s'il existe $z_0 \neq 0$ tel que la série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ soit convergente, alors on sait que

- la série entière converge absolument si $|z| < |z_0|$,
- pour $|z| \leq \rho < |z_0|$ la série entière converge uniformément.

rayon de convergence

Pour toute série entière $\exists R$ (avec les cas limites $R = 0$ et $R = \infty$ possibles) tel que :

- ◆ si $|z| < R$ la série entière converge absolument,
- ◆ si $|z| > R$ la série diverge,
- ◆ si $|z| \leq \rho < R$ la série converge uniformément et donc sa somme $S(z)$ est une fonction continue de z

Ce nombre R , s'appelle rayon de convergence de la série, peut être déterminé par la règle de Cauchy ou par la règle d'Alembert.

Le cercle de centre O et de rayon R s'appelle cercle de convergence de la série qui sera absolument convergente en tout point strictement intérieur à ce cercle.

Propriétés du rayon de convergenceSomme des séries :

Soient les séries entières : $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence R_1 et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ de rayon de convergence R_2 . Le rayon de convergence, R , de la série somme : $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$ est :

- au moins égale à R_1 si $R_1 = R_2$
- $R = \inf(R_1, R_2)$ si $R_1 \neq R_2$

Produit de deux séries entières :

Soient les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, de rayon de convergence R_1 , et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$, de rayon de convergence R_2 , alors leur produit est une série entière dont les coefficients sont donnés par : $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n b_k a_{n-k}$

et dont le rayon de convergence est : $R = \inf(R_1, R_2)$ si $R_1 \neq R_2$.

Dérivation ou intégration terme à terme :

En dérivant (resp. en intégrant) terme à terme une série entière on ne change pas son rayon de convergence et on obtient la dérivée (resp. l'intégrale) de la somme pour $|z| < R$.

La série géométrique :

Son rayon de convergence est $R = 1$, et sa somme : $\sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$; $|z| < 1$ définit une fonction continue (en fait analytique) de z dans l'ouvert $|z| < 1$.

Théorème

La somme $S(z)$ d'une série entière est une fonction holomorphe sur tout domaine D intérieur au cercle de convergence et la série intégrable terme-à-terme sur d

Théorème d'annulation

Si une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est nulle pour $|z| < r$ avec $r > 0$ alors tous ses coefficients $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ sont nuls.

5.2 Série de Taylor. Série de Mac-Laurin

5.2.1 Définitions

Si $f(z)$ est une fonction holomorphe sur un contour fermé simple C et à l'intérieur de ce contour alors $f(z)$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$, de la forme :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \\ &= 1 + \frac{(z-a)}{1!} f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(z-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots \end{aligned} \quad (5.4)$$

une telle série s'appelle série de Taylor.

Dans le cas où $a = 0$ la série de Taylor devient la série de Mac-Laurin :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} f^{(n)}(a) = 1 + \frac{z}{1!} f'(a) + \frac{z^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{z^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots \quad (5.5)$$

5.2.2 Développement en série de Taylor

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe sur un contour fermé simple (C) et à l'intérieur de (C) , et soit a un point intérieur à (C) . Considérons un cercle γ intérieur à (C) et centré en a et un point z intérieur à γ . L'intégrale de Cauchy donne une expression de $f(z)$ sous la forme :

$$f(z) = \frac{1}{2j\pi} \int_{\gamma} \frac{f(u) du}{u-z}$$

$$\text{Soit } q = \frac{z-a}{u-z} \implies |q| < 1$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{u-z} &= \frac{1}{(u-a)-(z-a)} = \frac{1}{(u-a)(1-q)} = \frac{1}{u-a} \cdot \frac{1}{1-q} \\ &= \frac{1}{u-a} \left(1 + q + q^2 + \dots + \frac{q^{n+1}}{1-q} \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$= \frac{1}{u-a} + \frac{z-a}{(u-a)^2} + \dots + \frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{u-a} \quad (5.7)$$

$$\text{avec } \varepsilon = \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

D'où en intégrant le long de γ :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2j\pi} \int_{\gamma} \frac{f(u)du}{u-z} \\ &= \frac{1}{2j\pi} \int_{\gamma} \frac{f(u)du}{u-a} + \frac{z-a}{2j\pi} \int_{\gamma} \frac{f(u)du}{(u-a)^2} + \dots + \frac{(z-a)^n}{2j\pi} \int_{\gamma} \frac{f(u)du}{(u-a)^{n+1}} + \epsilon_n \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\text{avec } \epsilon_n = \frac{1}{2j\pi} \int_{\gamma} \frac{\varepsilon \cdot f(u)du}{(u-a)} \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty$$

d'où :

$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1!} f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(z-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \quad (5.9)$$

C'est bien alors la série de Taylor.

Telle série s'écrit aussi :

$$f(z) = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \dots + A_n(z-a)^n + \dots \quad (5.10)$$

Avec :

$$A_n = \frac{1}{2j\pi} \int_{\gamma} \frac{f(u)du}{(u-a)^{n+1}}$$

Il est bien évident que si $a = 0$ on aura la série de Mac-Laurin :

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_n z^n + \dots \quad (5.11)$$

et :

$$A_n = \frac{1}{2j\pi} \int_{\gamma} \frac{f(u)du}{u^{n+1}} \quad (5.12)$$

5.3 Série de Laurent

5.3.1 Définition

Une série de fonctions de la forme :

$$B_0 + B_1 \left(\frac{1}{z}\right) + B_2 \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \dots + B_n \left(\frac{1}{z}\right)^n + \dots \quad (5.13)$$

peut être considérée comme une série entière où la variable est $\frac{1}{z}$. Telle série convergera donc à l'extérieur d'un certain cercle $|z| = R$ et la convergence est uniforme dans ce domaine .

Si on combine cette série avec une série entière ordinaire en z on obtient une série de la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{z^n} = A_0 + A_1 z + \dots + A_n z^n + \dots + \frac{B_1}{z} + \dots + \frac{B_n}{z^n} + \dots \quad (5.14)$$

La série (5.14) est dite convergente si et seulement si, séparément, les deux séries qui la compose sont convergente.

Comme la série $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ converge pour $|z| < R$ et la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{z^n}$ converge pour $|z| > R'$ il existe alors , si $R' < R$, un certain domaine de convergence de la série (5.14) définie par $R' < |z| < R$. Dans ce domain la série représente une fonction holomorphe .

Inversement on peut représenter une fonction holomorphe, dans un domaine $R' < |z| < R$ ou plus généralement $R' < |z - a| < R$, et montrer que telle fonction est la somme d'une série de la forme :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(z - a)^n} \\ &= A_0 + A_1 (z - a) + \dots + A_n (z - a)^n + \dots + \frac{B_1}{z - a} + \dots + \frac{B_n}{(z - a)^n} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Une telle série porte le nom de série de Laurent.

La série de Laurent s'écrit aussi sous la forme :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n (z - a)^n \text{ avec } A_n = \frac{1}{2j\pi} \int_{\gamma} \frac{f(u) du}{u^{n+1}} \quad (5.16)$$

Chapitre 6

ZÉROS, PÔLES ET RÉSIDUS

6.1 Définitions

6.1.1 Points singuliers

Tout point a est dit *singulier* d'une fonction $f(z)$ si et seulement si :

i) $f(z)$ n'est pas analytique en ce point

ii) tout voisinage de a contient au moins un point où $f(z)$ est analytique.

S'il existe un voisinage de a où la fonction $f(z)$ ne possède pas d'autre singularité que a , le point singulier est dit point *isolé*.

6.1.2 Points ordinaire

Le point a est dit point *ordinaire* si et seulement si $f(z)$ est analytique en a et dans un voisinage de a

Par exemple : Le point $z = 0$ est une singularité de $f(z) = \frac{1}{z}$ et il est un point ordinaire de $f(z) = z^2 + 1$.

6.2 Zéros, Pôles et Résidus

6.2.1 Zéros d'une fonction holomorphe :

Un point a est dit *zéro* d'une fonction holomorphe $f(z)$ si et seulement si $f(a) = 0$. Au voisinage de a la fonction s'écrit alors :

$$f(z) = A_0 + A_1(z - a) + A_2(z - a)^2 + \dots + A_n(z - a)^n + \dots \quad (6.1)$$

Les coefficients A_n ne peuvent être tous nuls sans que la fonction même ne soit identiquement nulle. Supposons que le premier coefficient non nul est A_m on a :

$$f(z) = A_m(z - a)^m + A_{m+1}(z - a)^{m+1} + \dots$$

Alors a est un zéro d'ordre m (si $m = 1$, a est également dit zéro simple, pour $m = 2$, zéro double..) .

6.2.2 Pôles

On appelle pôles d'une fonction analytique $f(z)$ les points singuliers isolés autour des quels la fonction reste uniforme et qui sont des points ordinaires pour $\frac{1}{f(z)}$. Autrement dit les pôles de la fonction $f(z)$ sont les zéros de $\frac{1}{f(z)}$.

Si la fonction $f(z)$ est développable en série de Laurent au voisinage de a et si les coefficients $B_1, B_2, \dots, B_m$ sont non nuls et $B_{m+1} = B_{m+2} = \dots = 0$ le point a est dit pôle d'ordre m .

par exemple la fonction $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ a deux pôles simples : $z = j$ et $z = -j$.

6.2.3 Résidu en un pôle

Soit a un pôle d'ordre m de $f(z)$. En tout point z intérieur à un certain cercle $C(a, R)$, on a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z-a)^n + \frac{B_1}{(z-a)} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{B_m}{(z-a)^m} \quad (6.2)$$

Le nombre B_1 s'appelle résidu de $f(z)$ relatif au pôle a .

6.2.4 Théorème

Si C est un contour fermé simple entourant un point a et $f(z)$ une fonction holomorphe sur C et à l'intérieur de C sauf en a qui est un pôle d'ordre m de $f(z)$, alors le résidu de $f(z)$ relatif au pôle a est :

$$R(a) = B_1 = \frac{1}{2j\pi} \int_C f(z) dz \quad (6.3)$$

En effet, on a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z-a)^n + \frac{B_1}{(z-a)} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{B_m}{(z-a)^m}$$

intégrons $f(z)$ le long de (C) :

$$\int_C f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_C (z-a)^n + B_1 \int_C \frac{dz}{z-a} + \dots + B_m \int_C \frac{dz}{(z-a)^m}$$

La première intégrale du second membre est nulle car la fonction à intégrer est analytique d'après le théorème de Cauchy. D'autre part :

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = 2j\pi \quad \text{et les intégrales : } \int_C \frac{dz}{(z-a)^m} = 0 \text{ pour } m \neq 1 \text{ (d'après la}$$

formule intégrale de Cauchy). D'où :

$$\int_C f(z) dz = 2j\pi B_1 \quad \text{ou } B_1 = \frac{1}{2j\pi} \int_C f(z) dz$$

6.3 Théorème des résidus

Si $f(z)$ est une fonction holomorphe à l'intérieur d'un contour (C) sauf aux points α_i d'un ensemble S de singularités isolés (S est un ensemble fini) Alors :

$$\frac{1}{2j\pi} \int_C f(z) dz = \sum_{\alpha_i \in S} R(\alpha_i) \quad (6.4)$$

Le second membre de l'égalité (6.4) est la somme des résidus relatifs aux pôles α_i de l'ensemble S .

En effet, Traçons autour de chaque pôle α_i un cercle γ_i de centre α_i et rayon infiniment petit. On a pour tout $\alpha_i \in S$ (d'après la formule 6.3) :

$$\int_{\gamma_i} f(z) dz = 2j\pi \cdot R(\alpha_i)$$

D'autre part : $C = \left(\bigcup_i \gamma_i \right) \cup C_1$ où C_1 est la partie de C ne contenant pas des points de singularités, donc sur C_1 la fonction est holomorphe et $\int_{C_1} f(z) dz = 0$ donc :

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \sum \int_{\gamma_i} f(z) dz = \sum_{\alpha_i \in S} R(\alpha_i) \quad (6.5)$$

Commentaires :

Le théorème des résidus est la forme la plus synthétique de la formule intégrale de Cauchy. Sa portée est limitée, dans la forme donnée ici, par l'hypothèse faite sur le domaine. Cependant la version donnée ici suffit pour le plus grand nombre des applications élémentaires.

6.4 Calcul des résidus

6.4.1 Cas d'un pôle simple

Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un domaine D et admet le point a comme un pôle simple. $f(z)$ s'écrit alors en série de Laurent :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n + \frac{B_1}{(z-a)}$$

Soit $\varphi(z) = f(z) \cdot (z-a) = B_1 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^{n+1}$ alors :

$$B_1 = R(a) = \lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = \lim_{z \rightarrow a} [f(z)(z-a)] \quad (6.6)$$

Si la fonction est de la forme : $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$; g et h sont holomorphes, $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$ et $h'(a) \neq 0$. a est un zéro simple de $h(z)$ qui se met sous la forme :

$$h(z) = (z - a).h_1(z)$$

$h_1(z)$ est holomorphe et $h_1(a) \neq 0$. Or $h'(z) = h_1(z) + (z - a).h_1'(z) \Rightarrow h'(a) = h_1(a)$.

La relation (6.6) nous donne :

$$R(a) = \lim_{z \rightarrow a} [f(z)(z - a)] = \lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z)}{h_1(z)} = \frac{g(a)}{h'(a)}$$

6.4.2 Cas d'un pôle multiple

On suppose que la fonction $f(z)$ présente en a un pôle multiple d'ordre $m \neq 1$ donc la série de Laurent associée à $f(z)$ est :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z - a)^n + \frac{B_1}{(z - a)} + \frac{B_2}{(z - a)^2} + \dots + \frac{B_m}{(z - a)^m}$$

dans ce cas on considère la fonction $\varphi(z) = (z - a)^m.f(z)$:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z - a)^{n+m} + B_1(z - a)^{m-1} + B_2(z - a)^{m-2} + \dots + B_m \\ &= F(z) + B_1(z - a)^{m-1} + B_2(z - a)^{m-2} + \dots + B_m \end{aligned}$$

Faisons les dérivées successives de $\varphi(z)$ jusqu'à l'ordre $m - 1$:

$$\varphi'(z) = F'(z) + (m - 1)B_1(z - a)^{m-2} + (m - 2)B_2(z - a)^{m-3} \dots + B_{m-1}$$

$$\varphi''(z) = F''(z) + (m - 2)(m - 1)B_1(z - a)^{m-3} + (m - 2)(m - 3)B_2(z - a)^{m-4} \dots +$$

B_{m-2}

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\varphi^{(m-1)}(z) = F^{(m-1)}(z) + (m - 1).(m - 2)(m - 3) \dots 2.1.B_1 = F^{(m-1)}(z) + (m - 1)!.B_1$$

si $z \rightarrow a$ $F^{(m-1)}(z) \rightarrow 0$, par suite $\varphi^{(m-1)}(z) \rightarrow (m - 1)!.B_1$ et on trouve :

$$R(a) = \frac{1}{(m - 1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - a).f(z)] \right\} \quad (6.7)$$

6.5 Dénombrement des zéros et des pôles

Considérons une fonction holomorphe $f(z)$ et non nulle sur un contour C et à l'intérieur sauf en un nombre P fini des pôles.

6.5.1 Théorème

Si la fonction $f(z)$ est à l'intérieur de C sauf en P pôles et si elle a Z zéros dans C alors :

$$Z - P = \frac{1}{2j\pi} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (6.8)$$

En effet :

Soit a un zéro d'ordre n de la fonction $f(z)$, alors cette fonction s'écrit $f(z) = (z - a)^n f_1(z) \Rightarrow \ln f(z) = n \ln(z - a) + \ln f_1(z)$ et la dérivée :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = n \cdot \frac{1}{z - a} + \frac{f'_1(z)}{f_1(z)}.$$

$f_1(z)$ et $f'_1(z)$ sont analytiques alors $\frac{f'_1(z)}{f_1(z)}$ est aussi analytique et $\int_C \frac{f'_1(z)}{f_1(z)} dz = 0$ donc :

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n \cdot \int_C \frac{dz}{z - a} = n \cdot 2j\pi$$

▲ Remarquons que n est le résidu de $\frac{f'(z)}{f(z)}$ relatif au pôle a .

Soit b un pôle d'ordre p de $f(z)$ alors on a : $f(z) = \frac{1}{(z - b)^p f_2(z)} \Rightarrow \ln f(z) = -p \ln(z - b) - \ln f_2(z)$ et la dérivée :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -p \cdot \frac{1}{z - b} - \frac{f'_2(z)}{f_2(z)} \Rightarrow \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -p \cdot 2j\pi$$

si la fonction $f(z)$ a le point a comme un zéro d'ordre n et b un pôle d'ordre p . On aura :

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2j\pi(n - p)$$

Plus généralement, si $f(z)$ a Z zéro et P pôles :

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2j\pi(Z - P) \quad (6.9)$$

On admet le théorème suivant :

6.5.2 Théorème :

Si $f(z)$ et $g(z)$ sont deux fonctions analytiques dans un domaine simplement connexe D et si $|g(z)| < |f(z)|$ dans ce domaine, alors $f(z)$ et $f(z) + g(z)$ ont le même nombre de zéros dans D .

6.6 Applications : Calcul des intégrales définies

Le calcul des intégrales définies par le méthode des résidus est l'une des figures imposées de ce cours. C'est d'ailleurs un outil simple et puissant qui procure des

résultats spectaculaires à ceux qui le manient avec habileté. Nous nous contenterons ici d'illustrer quelques cas où la méthode réussit, et de dégager quelques idées générales pour aborder les problèmes de ce type.

6.6.1 Intégrales du premier type

La forme générale est : $I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$ où $R(\cos t, \sin t)$ est une fonction rationnelle en $\cos t$ et $\sin t$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur le cercle unité (de centre O et de rayon 1).

On regarde le couple $(\cos t, \sin t)$ comme une représentation paramétrique du cercle unité C sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Passant à la notation complexe : $z = \exp(jt)$ alors :

$$\cos t = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) ; \sin t = \frac{1}{2j} \left(z - \frac{1}{z} \right) \text{ et } dt = \frac{dz}{jz}$$

on obtient, alors, l'égalité suivante :

$$I = \int_C R \left[\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2j} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right] \frac{dz}{jz} \quad (6.10)$$

La fonction à intégrer $f(z) = R \left[\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2j} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right]$ est une fonction rationnelle qui n'a pas des pôles sur C et soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ les pôles de $f(z)$ intérieur à C et $R(a_i)$ les résidus relatifs. La formule des résidus mène à l'égalité :

$$I = 2j\pi \cdot \sum_i R(a_i)$$

6.6.2 Intégrales du second type

La forme générale est : $I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$ où $R(x)$ est une fonction rationnelle de la variable réelle x où $R(z)$ vérifie les conditions suivantes :

- elle n'a pas de pôle réel
- $\lim_{z \rightarrow \infty} zR(z) = 0$

La première condition est indispensable pour que $R(z)$ existe pour tout x réel.

La deuxième revient à dire que $R(z)$ se met sous la forme suivante : $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ où P et Q sont deux polynômes tels que $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$. Cette condition assure notamment la convergence absolue de l'intégrale, par comparaison avec $1/x^2$.

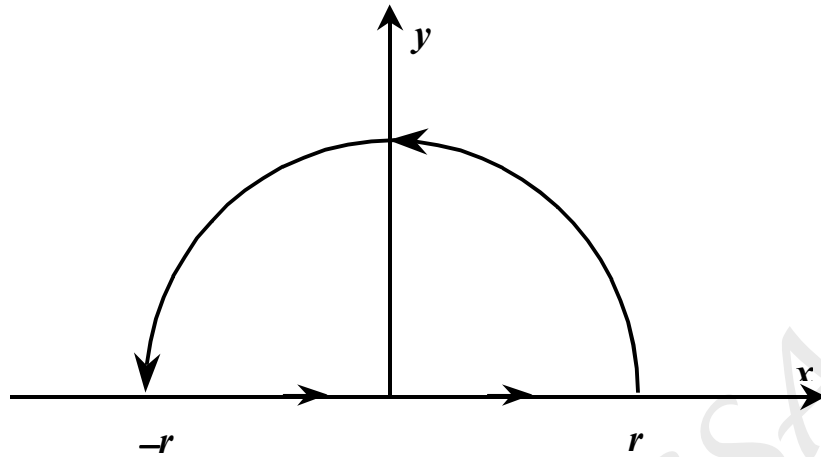


Figure 6.1 : contour d'intégration

Pour calculer cette intégrale on considère le contour de la figure 1 décrit dans le sens positif. C'est la frontière du demi disque ($y \geq 0$) centré à l'origine et de rayon r . Le contour C entourant le disque est : $\Gamma \cup [-r, r]$ avec Γ le demi cercle supérieur et $[-r, r]$ le segment intersection du disque avec l'axe Ox sur lequel $z = x$ et $R(z) = R(x)$. D'où :

$$\int_C R(z) dz = \int_{\Gamma} R(z) dz + \int_{-r}^r R(x) dx$$

Sur Γ on peut passer vers la notation complexe : $z = r \cdot \exp(j\theta) \Rightarrow dz = jr \exp(j\theta) d\theta$

on a $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$ alors $R(r \cdot \exp(j\theta)) \cdot jr \exp(j\theta) \rightarrow 0$ si $r \rightarrow \infty$ et :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} R(z) dz = 0$$

Ce qui donne :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_C R(z) dz = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} R(z) dz + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r R(x) dx = I$$

On obtient donc :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = \int_C R(z) dz = 2j\pi \sum R(\alpha_i)$$

6.6.3 Intégrale mixte

Les intégrales de la formes : $I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos mx dx$ et $J = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin mx dx$

Dans les deux intégrales la fonctions ratinnelle $R(x)$ a les mêmes propriétés que celle du paragraphe précédent.

On considère la fonction $f(z) = R(z) \cdot \exp(mz)$ et fait le calcul de l'intégrale complexe sur le contour de la figure 1.on obtient :

$$\int_C f(z) dz = A + jB \implies I = A \text{ et } J = B$$

6.6.4 Exemples

1— Soit à calculer l'intégrale : $I(x) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{x^2 - 2x \cos t + 1}$

où x est un paramètre réel qui ne prend pas les valeurs 1 et -1 . Le Cas $x = 0$ est immédiat :

$$I(0) = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Supposons donc $x \neq 0$. La méthode exposée ci-dessus mène à l'expression :

$$I(x) = \int_0^{2\pi} \frac{dz/jz}{x^2 - x(z + 1/z) + 1}$$

on a : $x^2 - x(z + 1/z) + 1 = x^2 - xz - x/z + 1 = (x - z)(x - 1/z) = (x - z)(xz - 1)/z$
D'où :

$$I(x) = \int_C \frac{jdz}{(z - x)(xz - 1)} \text{ avec } C \text{ le cercle unité}$$

La fonction à intégrer a alors deux pôles simples : $z = x$ et $z = 1/x$. On a :
 $x \neq 1, -1 \implies |x| > 1$ ou $|x| < 1$

♠ Si $|x| > 1$ donc seul le pôle $z = 1/x$ est à l'intérieur du contour C .

Le résidu relatif au pôle $z = 1/x$ est : $R(1/x) = \frac{j}{1 - x^2}$

et donc $I(x) = 2j\pi \cdot R(1/x) = \frac{2\pi}{1 - x^2}$

♠ Si $|x| < 1$ le pôle à l'intérieur du contour est $z = x$

Le résidu est : $R(x) = \frac{j}{x^2 - 1} \implies I(x) = 2j\pi \cdot \frac{j}{x^2 - 1} = \frac{2\pi}{1 - x^2}$

2- Soit à calculer : $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

On considère la fonction : $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ qui a deux pôles doubles j et $-j$. Dans le domaine de la figure 6.1 on a seulement le pôle $+j$, on écrit $f(z) = \frac{1}{[(z-j)(z+j)]^2}$ soit $\varphi(z) = (z-j)^2 f(z) = \frac{1}{(z+j)^2}$

j est un pôle double alors : $R(j) = \frac{1}{1!} \frac{d\varphi}{dz} \Big|_{z=j} = \frac{-2}{(z+j)^3} \Big|_{z=j} = \frac{-2}{(2j)^3} = \frac{1}{4j}$

et :

$$I = 2j\pi \cdot R(j) = 2j\pi \cdot \frac{1}{4j} = \frac{\pi}{2}$$

3- Calculons l'intégrale : $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} dx$

La fonction complexe à intégrer est $f(z) = \frac{\exp(jz)}{(1+z^2)^2} = \frac{\exp(jz)}{(z-j)^2(z+j)^2}$ alors deux pôles doubles j et $-j$

de même que l'exemple précédent j seul à l'intérieur du contour (fig.6.1)

$$\varphi(z) = (z-j)^2 f(z) = \frac{\exp(jz)}{(z+j)^2} \implies \varphi'(z) = \frac{j(z+j)\exp(jz) - 2\exp(jz)}{(z+j)^3}$$

$$\varphi'(j) = R(j) = \frac{1}{2je} \implies I = 2j\pi \cdot \frac{1}{2je} = \frac{\pi}{e}$$