

Université de M'sila			Faculté : Maths-informatique	
L 2 Mathématiques			Année : 2023/2024	
Module Analyse 4			Durée : 1h – 30m	
		Correction d'examen		
		final		

Barème	Correction d'exercice : 1 6pts
	Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par : $f(x, y, z) = x^2 - xy + 2z$, et le vecteur $\vec{v}(1, 1, 1)$.
3 × 0.5	❶ La dérivée directionnelle de f au point $a(1, 0, -1)$ le long la direction $\vec{v}$ est $D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1 + t, t, -1 + t) - f(1, 0, -1)}{t} = 3.$
1 + 0.5	❷ a On a $\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(1, 0, -1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$
0.5	Donc, on trouve, $\langle \nabla f(a), v \rangle = 2 \times 1 + (-1) \times 1 + 2 \times 1 = 3 = D_v f(a)$.
0.5	b On sait que $df_a(v) = D_v f(a)$. Donc, $df_a(v) = 3$.
0.5	❸ Comme $f(1 + h, k, -1 + l) = f(1, 0, -1) + df_{(1,0,-1)}(h, k, l) + o(\ (h, k, l)\)$, donc,
0.5	$f(1 + h, k, -1 + l) \approx f(1, 0, -1) + df_{(1,0,-1)}(h, k, l)$, si $\ (h, k, l)\ \rightarrow 0$.
	Ici $(h, k, l) = (0.1, 0.2, 0.1)$. Par suit, on a,
0.5	$f(1.1, -0.9) \approx -1 + 2 \times 0.1 - 0.2 + 2 \times 0.1 = -0.8$.

Barème	Correction d'exercice : 2 7pts
	Soient les fonctions f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = 3x + y$, et la containte $x^2 + y^2 = 10$.
	❶ Le lagrangien associée au problème est
1	$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(x^2 + y^2 - 10) = 3x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 10).$
3	❷ Les points critiques liés de f . On a :
	$\nabla L(x, y, \lambda) = O_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 - 2\lambda x \\ 1 - 2\lambda y \\ -x^2 - y^2 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$
	Par conséquent, on trouve, $(x, y, \lambda) \in \left\{ \left(3, 1, \frac{1}{2} \right), \left(-3, -1, -\frac{1}{2} \right) \right\}$.
	Donc, les points critiques liés de f sont $A(3, 1)$ et $B(-3, -1)$.
3	❸ Lanature des points critiques liés
	a $H_L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}^2 L(x, y, \lambda) & \partial_{xy}^2 L(x, y, \lambda) & \partial_{x\lambda}^2 L(x, y, \lambda) \\ \partial_{yx}^2 L(x, y, \lambda) & \partial_{yy}^2 L(x, y, \lambda) & \partial_{y\lambda}^2 L(x, y, \lambda) \\ \partial_{\lambda x}^2 L(x, y, \lambda) & \partial_{\lambda y}^2 L(x, y, \lambda) & \partial_{\lambda\lambda}^2 L(x, y, \lambda) \end{pmatrix}$

Par suit, on trouve $H_L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 & -2x \\ 0 & -2\lambda & -2y \\ -2x & -2y & 0 \end{pmatrix}$

(b) Le déterminant de la matrice Hessienne au point $A\left(3, 1, \frac{1}{2}\right)$ est

$$\left| H_L\left(3, 1, \frac{1}{2}\right) \right| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & -2 \\ -6 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0, \text{ et comme, } \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\left(3, 1, \frac{1}{2}\right) = -1 < 0. \text{ Alors, } A \text{ est}$$

un maximum lié.

(c) Le déterminant de la matrice Hessienne au point $B\left(-3, -1, -\frac{1}{2}\right)$ est

$$\left| H_L\left(-3, -1, -\frac{1}{2}\right) \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 > 0, \text{ et comme, } \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\left(-3, -1, -\frac{1}{2}\right) = 1 > 0. \text{ Alors,}$$

B est un minimum lié.

Barème

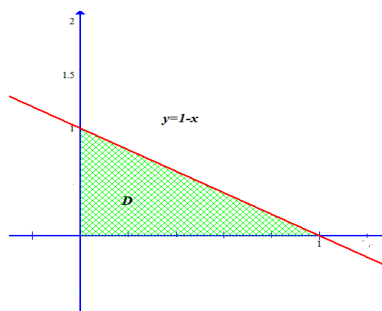
Correction d'exercice : 3

7pts

Soit l'intégral double $I = \iint_D f(x, y) dx dy$, où D le domaine définie par :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq x + y \leq 1\}.$$

2 1 Présentation de D .



3 2 On calcul l'intégral I . Alors, on a

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \frac{1}{1+x+y} dy \right] dx = \int_0^1 \left[\ln(1+x+y) \right]_0^{1-x} dx$$

D'après théorème de Fubini, et par intégration par parties, on aura



3

$$I = \int_0^1 [\ln 2 - \ln(1+x)] dx = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x) dx = \ln 2 - \left[(x+1) \ln(1+x) - x \right]_0^1$$

$$= 1 - \ln 2.$$

3 Posons :
$$\begin{cases} u = x \\ v = x + y, \end{cases} \quad \text{ça donne} \quad \begin{cases} x = u \\ y = -u + v, \end{cases}$$

Soit $\varphi(u, v) = (u, -u + v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$. La matrice jacobienne de φ au point

(u, v) est alors donnée par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. De plus, $J\varphi(u, v) = 1$ et $\Delta = [0, 1]^2$ tel que,

$\Delta = \varphi^{-1}(D) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$. Donc,

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} \frac{1}{1+v} du dv = \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{1}{1+v} dv \right] du = \int_0^1 [\ln(1+v)]_0^1 du$$

$$= \int_0^1 \ln 2 du = \ln 2.$$