

Université de M'sila			Faculté : Maths-informatique	
L 2 Mathématiques			Année : 2023/2024	
Module Analyse 4			Durée : 1h – 30m	
		Correction d'examen		
		final		
Barème	Correction d'exercice : 1			6pt
	Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = xe^{x-y}$			
0.5	1 f est un produit de 2 fonctions $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto e^{x-y}$ sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$.			
1	Donc, elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.			
	Par conséquent f est différentiable en point $(1, -1)$ et sa différentielle donner par :			
0.5 $\times$ 2	$f(1 + h, -1 + k) = h \frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) + k \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1).$			
	Comme $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x + 1)e^{x-y} \\ -xe^{x-y} \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(1, -1) = \begin{pmatrix} 2e^2 \\ -e^2 \end{pmatrix}.$			
0.5	C'est à dire $f(1 + h, -1 + k) = 2e^2h - e^2k.$			
	2 D'après question 1, le developpement limité de f à l'ordre 1 au point $(1, -1)$ est donner par			
1	$f(1 + h, -1 + k) = h \frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) + k \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) + o\left(\ (h, k)\ \right)$			
1	Par suit, on a : $f(1 + h, -1 + k) = 2e^2h - e^2k + o\left(\ (h, k)\ \right).$			
0.5	3 Ici $(h, k) = (0.1, 0.1)$ car $1.1 = 1 + 0.1$ et $-0.9 = -1 + 0.1$ Donc, la valeur approchée de			
0.5	$f(1.1, -0.9) \approx 0.2e^2 - 0.1e^2 = 0.1e^2.$			
Barème	Exercice : 2			8pt
	Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(y + 1)}{x^2 + (y + 1)^2} & : (x, y) \neq (0, -1) \\ 0 & : (x, y) = (0, -1) \end{cases}$			
	1 Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.			
0.5	a Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, -1)\}$, on a f est continue, car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, (f est rationnelle).			
	b Pour $(x, y) = (0, -1)$, on utilisant les coordonnées polaires, posons, donc			
	$\begin{cases} x = r \cos \theta, & \text{où } r > 0 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[. \\ y = -1 + r \sin \theta \end{cases}$			
0.5	On aura donc, $ f(x, y) = f(r \cos \theta, -1 + r \sin \theta) = r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \leq r^2 \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 .$			
0.5	C'est à dire, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,-1)} f(x, y) = 0 = f(0, -1)$. D'où la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.			
0.5	2 a La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, -1)\}$, car quotient de fonctions dérivables			

Université de M'sila	 Correction d'examen final	Faculté : Maths-informatique
L 2 Mathématiques		Année : 2023/2024
Module Analyse 4		Durée : 1h – 30m

dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc, pour $(x, y) \neq (0, -1)$, on trouve

$$1 \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x(y+1)^3}{(x^2 + (y+1)^2)^2} \\ \frac{x^2(x^2 - (y+1)^2)}{(x^2 + (y+1)^2)^2} \end{pmatrix}.$$

1 **(b)** Si $(x, y) = (0, -1)$, on a :

$$\nabla f(0, -1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0, -1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, -1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, -1) - f(0, -1)}{x} \\ \lim_{y \rightarrow -1} \frac{f(0, y) - f(0, -1)}{y + 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

0.5 **(c)** C'est à dire, $\nabla f(x, y) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\vec{j}, & \text{si } (x, y) \neq (0, -1) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\vec{j}, & \text{si } (x, y) = (0, -1) \end{cases}$

$$= \begin{cases} \frac{2x(y+1)^3}{(x^2 + (y+1)^2)^2}\vec{i} + \frac{x^2(x^2 - (y+1)^2)}{(x^2 + (y+1)^2)^2}\vec{j}, & \text{si } (x, y) \neq (0, -1) \\ 0\vec{i} + 1\vec{j} = \vec{j}, & \text{si } (x, y) = (0, -1) \end{cases}$$

1.5 **3** f n'est pas dérivable en point $(0, -1)$. Donc, n'est pas différentiable en $(0, -1)$.

1 **4** $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,-1)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,-1)} \frac{2x(y+1)^3}{(x^2 + (y+1)^2)^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \cos \theta \sin^3 \theta = \cos \theta \sin^3 \theta$

0.5 $\neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0, -1)$.

Remarque

0.5 Pour prouver que f n'est pas différentiable en $(0, -1)$ il faut montrer que :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,-1)} \frac{f(x, y) - f(0, -1) - \partial_x f(0, -1)x - \partial_y f(0, -1)(y + 1)}{\sqrt{x^2 + (y + 1)^2}} \neq 0.$$

0.5 Notons que, $\frac{f(x, y) - f(0, -1) - \partial_x f(0, -1)x - \partial_y f(0, -1)(y + 1)}{\sqrt{x^2 + (y + 1)^2}} = \frac{x^2(y + 1)}{(x^2 + (y + 1)^2)^{\frac{3}{2}}}.$

Si on pose, $x = r \cos \theta$, $y = -1 + r \sin \theta$, alors, on aura :

0.5 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,-1)} \frac{x^2(y + 1)}{(x^2 + (y + 1)^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{r \rightarrow 0} \cos^2 \theta \sin \theta \neq 0$ (dépend de θ .)

Donc f n'est pas différentiable en $(0, -1)$.

Barème

Correction d'exercice : 3

6pt

f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = x^2 - \cos(y)$.

1 Les points critiques de f .

1 **(a)** On a : $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ \sin y \end{pmatrix}.$

1	(b) Par suite, $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, & k \in \mathbb{Z} \\ y = k\pi \end{cases}$
1	Alors, les points critiques sont $A_k(0, k\pi)$, $(k \in \mathbb{Z})$.
	2 Nature des points critiques :
0.5	(a) $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \cos y \end{pmatrix}$
	(b) Le déterminant de la matrice Hessienne aux points $(0, k\pi)$ est
0.5	$H_f(0, k\pi) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{vmatrix} = 2(-1)^k$. Par conséquent,
0.5	(c) Si k est pair, les points $A_k(0, k\pi)$ présentent des minimums locaux.
0.5	(d) Si k est impair, alors $A_k(0, k\pi)$ sont des points selles.
1	3 Si k est pair on a $f(0, k\pi) = -(-1)^k = -1$, donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on obtient, $f(x, y) - f(0, k\pi) = x^2 + 1 - \cos y \geq 0$. Alors, les points $A_k(0, k\pi)$ sont des minimums globaux de f.