

Méthodes de Monte Carlo.

Université Mohamed BOUDIAF, M'Sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique.

El Mountasar Billah BOUHADJAR

25 février 2025

Méthodes de Monte Carlo

Définition :

Les méthodes de Monte Carlo sont des algorithmes informatiques qui reposent sur des échantillonnages aléatoires répétés pour résoudre des problèmes souvent déterministes. Inspirées du Casino de Monte Carlo à Monaco, elles ont été développées par Stanisław Ulam.

Méthodes de Monte Carlo

Définition :

Les méthodes de Monte Carlo sont des algorithmes informatiques qui reposent sur des échantillonnages aléatoires répétés pour résoudre des problèmes souvent déterministes. Inspirées du Casino de Monte Carlo à Monaco, elles ont été développées par Stanisław Ulam.

Applications :

- ▶ **Optimisation** : Trouver la meilleure solution dans des scénarios complexes.
- ▶ **Intégration numérique** : Résoudre des intégrales difficiles, en particulier en haute dimension.
- ▶ **Échantillonnage de probabilités** : Générer des échantillons aléatoires à partir de distributions.
- ▶ **Modélisation de l'incertitude** : Par exemple, évaluer les risques dans les centrales nucléaires.

Domaines d'utilisation :

- ▶ Sciences : Physique, chimie, biologie.
- ▶ Mathématiques et ingénierie : Statistiques, cryptographie, IA.
- ▶ Sciences sociales : Sociologie, psychologie, science politique.
- ▶ Finance : Modélisation des risques, optimisation de portefeuille.

Domaines d'utilisation :

- ▶ Sciences : Physique, chimie, biologie.
- ▶ Mathématiques et ingénierie : Statistiques, cryptographie, IA.
- ▶ Sciences sociales : Sociologie, psychologie, science politique.
- ▶ Finance : Modélisation des risques, optimisation de portefeuille.

Avantages :

- ▶ Résout des problèmes complexes et intraitables.
- ▶ Fortement adaptable à divers domaines.

Domaines d'utilisation :

- ▶ Sciences : Physique, chimie, biologie.
- ▶ Mathématiques et ingénierie : Statistiques, cryptographie, IA.
- ▶ Sciences sociales : Sociologie, psychologie, science politique.
- ▶ Finance : Modélisation des risques, optimisation de portefeuille.

Avantages :

- ▶ Résout des problèmes complexes et intraitables.
- ▶ Fortement adaptable à divers domaines.

Limites :

- ▶ Plus on veut des résultats précis, plus le calcul demande du temps et des ressources.
- ▶ Les problèmes avec beaucoup de variables sont très difficiles à résoudre.
- ▶ Les résultats dépendent de bons générateurs de nombres aléatoires.
- ▶ Il n'est pas toujours facile de vérifier si les résultats sont corrects.

Origines de la Méthode de Monte Carlo

- ▶ **Buffon et les aiguilles (18^e siècle)** : Première idée de méthode aléatoire pour estimer π .
- ▶ **Années 1930** : Enrico Fermi expérimente des simulations pour l'étude de la diffusion des neutrons, mais ne publie pas ses travaux.
- ▶ **1946** : Stanisław Ulam propose une méthode moderne en jouant au solitaire, inspiré par l'idée de répéter des expériences aléatoires.
- ▶ **Collaboration avec John von Neumann** : Ils développent les premiers calculs Monte Carlo pour résoudre des problèmes liés aux armes nucléaires.
- ▶ **Nom Monte Carlo** : Référence au célèbre casino, suggéré par Nicholas Metropolis.

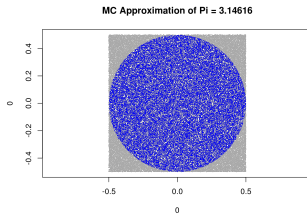
Évolution et Applications

- ▶ **Années 1940-50** : Calculs Monte Carlo utilisés pour la conception de l'H-bombe (ordinateur ENIAC).
- ▶ **Années 1950-60** : Développement dans les domaines de la physique et de la chimie.
- ▶ **Progrès récents** :
 - ▶ **Années 1990** : Méthodes Monte Carlo séquentielles utilisées en traitement du signal et inférence bayésienne.
 - ▶ **Applications modernes** :
 - ▶ Simulation quantique (méthodes de diffusion).
 - ▶ Informatique évolutive (algorithmes génétiques).
- ▶ **Impact** : Une méthode clé pour résoudre des problèmes complexes dans de nombreux domaines scientifiques.

Estimation de π avec Monte Carlo

Principe :

- ▶ On simule des tirs de fléchettes dans un carré centré à l'origine, de dimensions $[-1, 1]$ sur chaque axe.
- ▶ Une fléchette est dans le cercle inscrit si sa distance à l'origine vérifie $x^2 + y^2 < 1$.
- ▶ Le rapport $\frac{\text{fléchettes dans le cercle}}{\text{fléchettes totales}}$ donne une estimation de $\pi/4$.



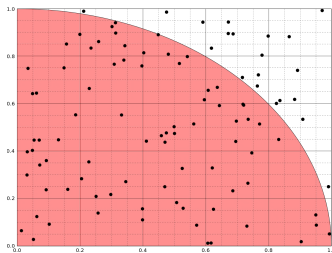
Lien avec l'expérience de Buffon

Concept :

- ▶ Cette méthode est liée à une ancienne expérience mathématique : l'aiguille de Buffon.
- ▶ Ici, on choisit au hasard un point (x, y) dans un carré de côté 1.
- ▶ Si $x^2 + y^2 < 1$, le point est dans le cercle inscrit.

Probabilité :

- ▶ La probabilité que le point soit dans le cercle est $\pi/4$.
- ▶ Plus le nombre de points simulés est grand, plus l'estimation de π est précise.



Estimation de la superficie d'un lac avec Monte Carlo

Principe :

- ▶ On considère une zone rectangulaire ou carrée de côtés connus, contenant un lac de superficie inconnue.
- ▶ On simule N tirs aléatoires (par exemple des tirs de canon) sur cette zone.
- ▶ X tirs tombent sur le terrain, donc $N - X$ tirs tombent dans le lac.

Calcul :

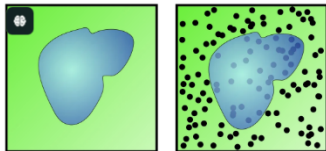
- ▶ Aire du terrain = longueur $\times$ largeur
- ▶ Probabilité qu'un tir tombe dans le lac = $\frac{N-X}{N}$
- ▶ Aire du lac = $\frac{(N-X)}{N} \times$ Aire du terrain

Exemple Numérique et Qualité de l'Estimation

Exemple :

- ▶ Le terrain a une superficie de 1000 m^2 .
- ▶ 500 tirs sont effectués aléatoirement, et 100 projectiles tombent dans le lac.
- ▶ Superficie estimée du lac :

$$\text{Aire du lac} = (100 \times 1000)/(500) = 200 \text{ m}^2$$



Qualité de l'estimation :

- ▶ L'estimation s'améliore avec un nombre plus important de tirs.
- ▶ La qualité du générateur aléatoire est cruciale :
 - ▶ Un générateur biaisé (comme un canon qui vise toujours au même endroit) fausse les résultats.
 - ▶ Un bon générateur doit assurer une couverture uniforme de la zone.

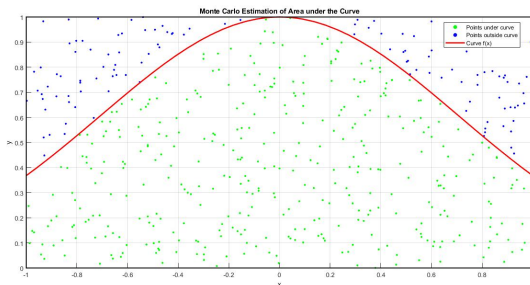
Estimation d'une intégrale avec Monte Carlo

Principe :

- ▶ Soit $I = \int_a^b f(x) dx$ l'intégrale à estimer.
- ▶ Exemple : Calculer $\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$.
- ▶ Méthode :
 - ▶ Générer N points aléatoires uniformément dans un rectangle englobant la courbe.
 - ▶ Compter n points qui se trouvent sous le graphe de $f(x)$.

Calcul :

$$\text{Aire sous la courbe} = \frac{n}{N} \times \text{superficie du rectangle}$$

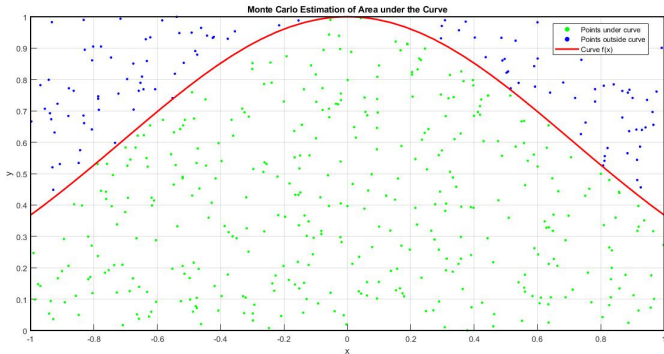


3. Calcul d'une intégrale

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Soit à calculer $\int_{-1}^{+1} e^{-x^2} dx$ On génère N points aléatoires dans le rectangle (voir schéma), puis on calcule le nombre n de points appartenant à l'aire sous le graphe de $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in [-1, 1]$.

$$\Rightarrow \text{aire} = \frac{n}{N} \times \text{superficie}_{\text{rect}}$$



Conclusion

- ▶ Les méthodes de Monte Carlo utilisent le hasard pour résoudre des problèmes complexes.
- ▶ Elles ont évolué des jeux de hasard à des applications modernes en science et technologie.
- ▶ Une méthode incontournable pour la modélisation et la simulation dans de nombreux domaines.