

Processus stochastiques

Dr. El Mountasar Billah BOUHADJAR

Université de M'Sila

Faculté des Mathématiques et de l'informatique

Département de Mathématiques

E-mail : elmountasarbillah.bouhadjar@univ-msila.dz

5.0 Janvier 2025

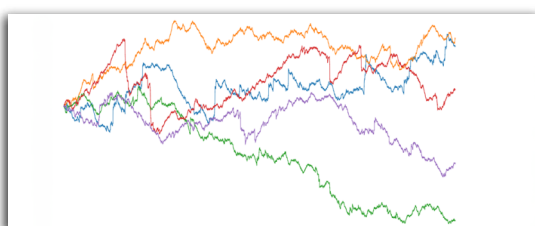


Table des matières

I - Chaîne de Markov	3
1. Objectif du chapitre	3
2. Définition et propriétés de base.....	3
3. Chaînes de Markov homogènes	4
3.1. Propriétés d'une matrice de transition	4
4. Graphe associé à une chaîne de Markov.....	5
5. Exercice	5
6. Propriétés élémentaires	6
7. comportement asymptotique.....	7
8. Classification des états	8
8.1. Définitions	9
8.2. Partition des états	9
9. Théorèmes ergodiques.....	11
10. Test	12
11. Exercice	12
12. Exercice	12
Solutions des exercices	13
Bibliographie	14

Chaîne de Markov



Une chaîne de Markov est un processus aléatoire où l'avenir dépend uniquement de l'état actuel, sans tenir compte des états passés. Ces processus peuvent évoluer dans le temps de façon discrète ou continue, et les états peuvent être en nombre fini ou infini dénombrable. Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur les chaînes de Markov à temps discret.

1. Objectif du chapitre

Les objectifs spécifiques du deuxième chapitre sont les suivants :

- **Nommer** les éléments fondamentaux des chaînes de Markov (matrices de transition, graphes).
- **Expliquer** le comportement asymptotique des chaînes de Markov.
- **Calculer** la probabilité de transition en n étapes à travers la matrice de transition.
- **Comparer** les distributions stationnaires et limites.
- **Mettre en rapport** les relations entre les différents états d'une chaîne de Markov.

2. Définition et propriétés de base

Soit un processus stochastique à valeurs dans un espace d'états dénombrable E . On munit E de la σ -algèbre $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$ (l'ensemble des parties de E). La filtration canonique associée au processus est définie par :

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n),$$

qui représente l'information disponible jusqu'à l'étape n .

Propriété de Markov



Définition

Le processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelé une **chaîne de Markov** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute séquence d'états $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in E^{n+1}$, on a : $\mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1})$

Cela signifie que la probabilité de transition vers un nouvel état x_n ne dépend que de l'état immédiatement précédent x_{n-1} .

En utilisant cette propriété, on peut dériver la distribution de probabilité jointe du processus. Par récurrence, il suit que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) &= \mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}) \\ &\quad \times \mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1} \mid X_{n-2} = x_{n-2}) \\ &\quad \times \dots \times \mathbb{P}(X_1 = x_1 \mid X_0 = x_0) \\ &\quad \times \mathbb{P}(X_0 = x_0). \end{aligned}$$

Ainsi, le comportement entier de la chaîne de Markov est déterminé par :

1. La **loi initiale** $\mathbb{P}(X_0 = x_0)$, et
2. Les **probabilités de transition** $\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Chaînes de Markov homogènes

Une classe particulièrement importante de chaînes de Markov est celle des chaînes **homogènes dans le temps**

Chaîne de Markov homogène



Définition

Une chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **homogène** si, pour tous états $x, y \in E$ et pour toutes étapes $n \in \mathbb{N}$, la probabilité de transition $\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x)$ ne dépend que de x et y , et non de l'étape n . Autrement dit, les probabilités de transition sont stationnaires dans le temps.

Les chaînes de Markov homogènes sont plus simples à analyser car leur comportement est gouverné par un ensemble unique de probabilités de transition, qui peut être représenté par une **matrice de transition**. Dans le cas où E est **continu** ou plus général, on utilise un **noyau de transition**.

À partir de maintenant, nous ne considérerons que des **chaînes de Markov homogènes**. Par convention, nous appellerons simplement **chaînes de Markov** une chaîne de Markov homogène.

Matrice de transition et loi initiale



Définition

Soit X une chaîne de Markov. On définit la **matrice de transition** $(P = (P(x, y))_{(x, y) \in E^2})$ par :

$$P(x, y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x), \quad n \geq 0$$

où $P(x, y)$ représente la probabilité de transition de l'état x à l'état y .

On définit également la **loi initiale** $(\mu = (\mu(x))_{x \in E})$ par :

$$\mu(x) = \mathbb{P}(X_0 = x).$$

Avec ces définitions, la probabilité d'une trajectoire $(X_0, X_1, \dots, X_n)$ est donnée par :

$$\mathbb{P}(X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = \mu(x_0)P(x_0, x_1) \cdots P(x_{n-1}, x_n).$$

3.1. Propriétés d'une matrice de transition

Une matrice de transition n'est pas une matrice quelconque : elle doit vérifier des propriétés spécifiques.



Remarque

Soit P une matrice de transition d'une chaîne de Markov (X_t) . Alors, pour tout $(x, y) \in E^2$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $P(x, y) \in [0, 1]$,
2. $\sum_{y \in E} P(x, y) = 1$

Preuve

1. Par définition, $P(x, y) = \mathbb{P}(X_1 = y \mid X_0 = x)$. Comme une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1, on a $P(x, y) \in [0, 1]$
2. La somme des probabilités de transition partant d'un état x doit être égale à 1, car le processus doit évoluer vers un état de E à chaque étape. Formellement : $\sum_{y \in E} P(x, y) = \sum_{y \in E} \mathbb{P}(X_1 = y \mid X_0 = x) = \mathbb{P}(X_1 \in E \mid X_0 = x) = 1$.

4. Graphe associé à une chaîne de Markov.

Pour toute chaîne de Markov, il est possible de construire un graphe orienté qui représente ses transitions. Les sommets de ce graphe correspondent aux états de la chaîne, et une arête orientée est tracée du sommet x vers le sommet y si la probabilité de transition $P(x, y)$ est strictement positive. Chaque arête est étiquetée par la valeur de $P(x, y)$, ce qui permet de visualiser directement les probabilités de transition entre les états.

Lorsque l'espace d'états E est fini, cette représentation graphique est particulièrement intuitive et facilite l'analyse des propriétés de la chaîne de Markov.

? Exemple

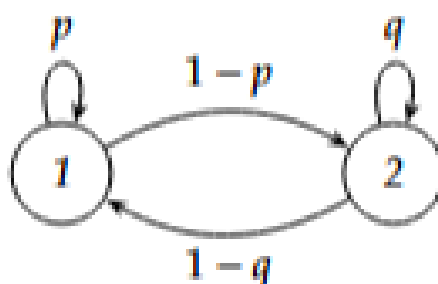
Considérons un espace d'états E contenant deux éléments, $E = \{1, 2\}$. Toute matrice de transition P associée à une chaîne de Markov sur cet espace peut s'écrire sous la forme suivante :

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix},$$

où $(p, q) \in (0, 1)^2$.

Dans cette matrice : p (resp. q) représente la probabilité de rester dans l'état 1 (resp. 2), tandis que $1-p$ (resp. $1-q$) est la probabilité de passer de l'état 1 à l'état 2 (resp. de 2 à 1).

Voici une représentation graphique typique de cette chaîne :



5. Exercice

Soit la matrice de transition d'une chaîne de Markov donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

- Construisez le graphe de transition associé à cette matrice.

6. Propriétés élémentaires

Il existe une ambiguïté potentielle dans la notation $P^n(x, y)$: s'agit-il du nombre $P(x, y)$ élevé à la puissance n , ou de l'entrée d'indices (x, y) de la matrice P élevée à la puissance n ? Pour éviter toute confusion, nous adoptons la convention suivante :

Puissance d'une matrice de transition



Définition

On note $P^n(x, y)$ l'entrée d'indices (x, y) de la matrice P^n , où P^n est la matrice de transition P élevée à la puissance n . Autrement dit, $P^n(x, y)$ représente la probabilité de transition de l'état x à l'état y en n étapes.

Probabilité de transition en n étapes



Fondamental

Soit X une chaîne de Markov de matrice de transition P . Pour tout $(x, y) \in E^2$ et pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$\mathbb{P}(X_{n+m} = y \mid X_n = x) = P^m(x, y).$$

Preuve

Nous procédons par récurrence sur m .

- **Cas de base ($m = 1$)** : Par définition de la matrice de transition, on a :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x) = P(x, y) = P^1(x, y).$$

La proposition est donc vraie pour $m = 1$.

- **Hypothèse de récurrence** : Supposons que la proposition est vraie pour $m - 1$, c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(X_{n+m-1} = z \mid X_n = x) = P^{m-1}(x, z)$$

Étape de récurrence : Montrons que la proposition est vraie pour $m > 1$. Par la propriété de Markov et la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+m} = y \mid X_n = x) &= \sum_{z \in E} \mathbb{P}(X_{n+m} = y, X_{n+m-1} = z \mid X_n = x) \\ &= \sum_{z \in E} \mathbb{P}(X_{n+m} = y \mid X_{n+m-1} = z, X_n = x) \mathbb{P}(X_{n+m-1} = z \mid X_n = x) \\ &= \sum_{z \in E} \mathbb{P}(X_{n+m} = y \mid X_{n+m-1} = z) \mathbb{P}(X_{n+m-1} = z \mid X_n = x) \\ &= \sum_{z \in E} P(z, y) P^{m-1}(x, z) \\ &= P^m(x, y). \end{aligned}$$



Remarque

La matrice P^m vérifie également les propriétés d'une matrice de transition. En particulier :

- Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $P^m(x, y) \in [0, 1]$.
- Pour tout $x \in E$, on a $\sum_{y \in E} P^m(x, y) = 1$.

Chapman-Kolmogorov



Fondamental

Pour tout $(x, y) \in E^2$ et tout couple (m, n) d'entiers positifs, on a l'identité :

$$P(X_{m+n} = y | X_0 = x) = \sum_{z \in E} P(X_m = z | X_0 = x) P(X_n = y | X_0 = z),$$

ou encore

$$P^{m+n}(x, y) = \sum_{z \in E} P^m(x, z) P^n(z, y).$$

7. comportement asymptotique

Soit une loi initiale μ et une matrice de transition P . Nous notons la combinaison de μ et P par :

$$\mu P(x) = \sum_{z \in E} \mu(z) P(z, x),$$

Dans cette notation, la loi initiale μ est un vecteur ligne et P une matrice, où $0 \leq \mu(z) \leq 1$ et $\sum_{z \in E} \mu(z) = 1$.



Fondamental

Soit X une chaîne de Markov avec une matrice de transition P et une loi initiale μ . Pour tout $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(X_n = x) = \mu P^n(x).$$

Preuve

D'après la loi totale des probabilités, on a :

$$\mathbb{P}(X_n = x) = \sum_{z \in E} \mathbb{P}(X_n = x | X_0 = z) \mathbb{P}(X_0 = z).$$

En utilisant la propriété des chaînes de Markov, on sait que $\mathbb{P}(X_n = x | X_0 = z) = P^n(z, x)$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(X_n = x) = \sum_{z \in E} P^n(z, x) \mu(z).$$

En réécrivant sous forme matricielle, on obtient :

$$\mathbb{P}(X_n = x) = \mu P^n(x).$$



Définition

Soit une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, positive ou bornée, et une matrice de transition P . On note

$$Pf(x) = \sum_{z \in E} P(x, z) f(z).$$

Autrement dit, dans nos notations matricielles, on considère une loi fonction comme un vecteur colonne.



Fondamental

Considérons une chaîne de Markov X associée à une matrice de transition P , ainsi qu'une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, qui est soit positive, soit bornée. Alors, pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il vient :

$$\mathbb{E}[f(X_n) | X_0 = x] = P^n f(x),$$

où l'on note :

$$Pf(x) = \sum_{z \in E} P(x, z) f(z).$$

Preuve

On a

$$\begin{aligned}
E[f(X_n)|X_0 = x] &= \sum_{z \in E} f(z)P(X_n = z|X_0 = x) \\
&= \sum_{z \in E} f(z)P^n(x, z) \\
&= \sum_{z \in E} P^n(x, z)f(z) \\
&= P^n f(x)
\end{aligned}$$

**Définition**

Soit π une loi de probabilité sur l'ensemble des états. Elle est dite stationnaire, ou invariante, si
 \$ ou, de façon équivalente, si pour tout $y \in E$ on a

$$\pi(y) = \sum_{x \in E} \pi(x)P(x, y)$$

π^T peut également être caractérisé comme un vecteur propre de P^T associé à la valeur propre 1.

**Fondamental**

Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P et de loi initiale π . Si π est invariante par P , alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim \pi$.

Preuve

Par définition, la loi de X_n est donnée par πP^n où π est la loi initiale. Puisque π est invariante par P , on a $\pi = \pi P$. Par récurrence, on en déduit que :

$$\pi P^n = \pi \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim \pi$.

**Remarque**

Si la loi initiale π est une distribution invariante par rapport à P , alors la chaîne de Markov X devient un processus stationnaire. Cela signifie que pour tout $h > 0$, la distribution de $(X_0, \dots, X_n)$ est identique à celle de $(X_h, \dots, X_{n+h})$.

Par ailleurs, si la suite (X_n) converge en loi vers une distribution π , cela implique que $\pi P^n \rightarrow \pi$ lorsque $n \rightarrow \infty$. En analysant l'expression $(\pi P^n)P$, on observe que π vérifie la relation $\pi = \pi P$, ce qui signifie que π est une loi invariante. Cela illustre le lien étroit entre les lois stationnaires et le comportement asymptotique des chaînes de Markov.

L'existence d'une loi invariante ne garantit pas que X converge en loi vers cette loi invariante. En effet, dans certains cas, il peut exister plusieurs lois invariantes.

8. Classification des états

Les états d'une chaîne de Markov peuvent être classés en plusieurs catégories importantes. Ces classifications permettent de mieux comprendre le comportement de la chaîne à long terme.

Temps d'arrêt**Définition**

Un **temps d'arrêt** par rapport à une filtration $\mathcal{F}_n$ est une variable aléatoire $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, telle que l'événement $\{T = n\}$ appartient à la tribu $\mathcal{F}_n$.

Dans notre travail, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$

Le **temps d'atteinte** est un exemple particulier de temps d'arrêt. Il représente le premier instant où la chaîne de Markov atteint un état donné i , indépendamment de l'état initial.

Formellement, on définit le temps d'atteinte de l'état i comme :

$$T_i = \inf\{n \geq 0 : X_n = i\}.$$

Propriétés**Fondamental**

- Si i est atteint après un nombre fini d'étapes, alors $T_i < \infty$.
- Si i n'est jamais atteint, alors $T_i = \infty$.
- T_i est un temps d'arrêt, car il peut être déterminé en observant les états $X_0, X_1, \dots, X_n$.

8.1. Définitions

La classification des états repose sur les concepts définis ci-dessus.

(a) État récurrent et transitoire Un état i est dit :

- **Récurrent**, si la probabilité de retourner à cet état est égale à 1:

$$f_{ii} = \mathbb{P}(\text{retourner à } i \mid \text{partir de } i) = 1.$$

ou nous pouvons écrire:

$$f_{ii} = \mathbb{P}(T_i < \infty \mid X_0 = i) = 1.$$

- **Transitoire**, si cette probabilité est strictement inférieure à 1 ($f_{ii} < 1$).

(b) Récence positive et nulle

Un état récurrent i est dit :

- **Récurrent positif**, si le temps moyen pour revenir à cet état est fini :

$$r_i := \mathbb{E}(T_i \mid X_0 = i) < \infty.$$

- **Récurrent nul**, si ce temps moyen est infini : $r_i = \infty$.

(c) Périodicité

La période d'un état i est définie comme :

$$d(i) = \text{pgcd}\{n \geq 1 : P_{ii}^n > 0\}.$$

- Si $d(i) > 1$, l'état i est dit **périodique**.
- , l'état i est **apériodique**.

(d) États absorbants et ergodiques

- Un état est **absorbant** si $P_{ii} = 1$.
- Un état est **ergodique** s'il est récurrent positif et apériodique.

8.2. Partition des états

L'ensemble des états d'une chaîne de Markov peut être regroupé en classes comprenant des états partageant les mêmes caractéristiques et la même période. Par ailleurs, certains types d'états sont éliminés si la classe contient un nombre fini d'états.

Définitions

- Soit $(i, j) \in E^2$. On dit que l'état j est **accessible** à partir de l'état i , noté $i \rightsquigarrow j$, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P^n(i, j) > 0$.
- Deux états i et j **communiquent**, noté $i \leftrightarrow j$, si $i \rightsquigarrow j$ et $j \rightsquigarrow i$. Cette relation binaire est une relation d'équivalence. En effet, elle est :
 - **réflexive** : $i \leftrightarrow i$, puisque $P_{ii}^0 = 1 > 0$;
 - **symétrique** : $i \leftrightarrow j$ si et seulement si $j \leftrightarrow i$, par définition ;
 - **transitive** : $i \leftrightarrow k$ si $i \leftrightarrow j$ et $j \leftrightarrow k$, car il existe $m, n \geq 0$ tels que $P_{ij}^n P_{jk}^m > 0$. Par la propriété de transition, on a

$$P_{ik}^{n+m} = \sum_l P_{il}^n P_{lk}^m \geq P_{ij}^n P_{jk}^m > 0.$$

- Une chaîne de Markov est **irréductible** s'il n'existe qu'une seule classe d'états autrement dit, si tous les états communiquent entre eux.

Une classe, ou une chaîne irréductible, est qualifiée de transiente, récurrente (positive ou nulle), périodique, apériodique ou ergodique, en fonction de la nature de ses états.

Proposition



Fondamental

Si i et j communiquent, c'est-à-dire $P_{ij}^n P_{ji}^m > 0$ pour certains $n, m \geq 0$, alors :

- **(a)** i est récurrent ssi, j est récurrent ;
- **(b)** i est récurrent positif ssi, j est récurrent positif ;
- **(c)** i et j ont la même période.

Proposition



Fondamental

Les états d'une classe récurrente possèdent les propriétés suivantes.

- **(a)** Si i est récurrent, alors

$$f_{ij} = \mathbb{P}(\text{visite future à } j \mid \text{départ de } i) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \leftrightarrow i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque $P_{ij}^n = 0$ pour tout $n \geq 1$ si i est récurrent et j n'appartient pas à la classe de i , toute classe récurrente est une **classe fermée**.

- **(b)** Si i et j sont dans la même classe récurrente, alors $f_{ki} = f_{kj}$ pour tout k .

Proposition



Fondamental

Si l'espace des états est fini, alors :

- **(a)** tous les états récurrents sont récurrents positifs ;
- **(b)** dans tous les cas, il y a au moins un état récurrent.



Remarque

Une chaîne irréductible (et toute classe fermée) sur un nombre fini d'états est récurrente positive.

Critères de classification



- **(a)** Un état i est récurrent si et seulement si $\sum_{n \geq 1} P_{ii}^{(n)} = \infty$. Sinon, il est transient, et alors nécessairement $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(n)} = 0$
- **(b)** Un état récurrent i est récurrent nul si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(n)} = 0$.
Sinon, il est récurrent positif.

9. Théorèmes ergodiques

- **(a)** Dans tous les cas sauf peut-être dans celui où j est un état récurrent positif périodique, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n = f_{ij} \times \frac{1}{r_j}$,

où

$$f_{ij} = \mathbb{P}(\text{visite future à } j \mid \text{départ de } i)$$

- **(b)** Dans tous les cas, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^k = f_{ij} \times \frac{1}{r_j}.$$

Remarque



Pour tout état j récurrent positif, la quantité r_j^{-1} représente la fraction moyenne de visites à j à long terme à partir de l'état initial j . En effet, on a alors ;

$$\frac{1}{r_j} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{jj}^{(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X_k=j\}} \mid X_0=j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(\frac{N_j(n)}{n} \mid X_0=j\right),$$

où

$$N_j(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=j\}}$$

est le nombre de visites à j de l'instant 0 à l'instant $n-1$.

Proposition



Une chaîne irréductible a une distribution stationnaire (π_j) si et seulement si elle est récurrente positive. Dans ce cas, la distribution stationnaire est unique et donnée par

$$\pi_j = r_j^{-1} \quad \text{pour tout état } j.$$



Pour tout état j dans une classe récurrente positive $C(j)$, qui est nécessairement fermée, on a $r_j^{-1} = \pi_j$, où (π_j) est une distribution stationnaire pour la chaîne de Markov restreinte aux états de la classe $C(j)$.

Proposition**Fondamental**

Une chaîne irréductible apériodique sur un nombre fini d'états, disons $0, 1, \dots, N-1$, est récurrente positive et sa matrice de transition en n pas satisfait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_{N-1} \\ \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_{N-1} \end{pmatrix}.$$

10. Test**11. Exercice**

[solution n°1 p. 13]

Soit une chaîne de Markov à temps discret avec deux états, 1 et 2, et une matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la probabilité que la chaîne reste dans l'état 1 au prochain pas de temps ?

- ☐ 0.7
- ☐ 0.3
- ☐ 0.4
- ☐ 1

12. Exercice

[solution n°2 p. 13]

La propriété fondamentale des chaînes de Markov stipule que :

- ☐ La probabilité d'un état futur dépend uniquement de l'état présent.
- ☐ La probabilité d'un état futur dépend de tous les états passés.
- ☐ Les états sont indépendants entre eux
- ☐ Les transitions doivent être uniformes.

Solutions des exercices



Solution n°1

[exercice p. 12]

Soit une chaîne de Markov à temps discret avec deux états, 1 et 2, et une matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la probabilité que la chaîne reste dans l'état 1 au prochain pas de temps ?

- ☒ 0.7
- ☐ 0.3
- ☐ 0.4
- ☐ 1

Solution n°2

[exercice p. 12]

La propriété fondamentale des chaînes de Markov stipule que :

- ☒ La probabilité d'un état futur dépend uniquement de l'état présent.
- ☐ La probabilité d'un état futur dépend de tous les états passés.
- ☐ Les états sont indépendants entre eux
- ☐ Les transitions doivent être uniformes.

Bibliographie



Grimmett, G., & Stirzaker, D. (2001). Probability and Random Processes. Oxford University Press.

Ross, S. M. (2014). Introduction to Probability Models. Academic Press.

Karlin, S., & Taylor, H. (1998). A First Course in Stochastic Processes. Academic Press.