

Processus stochastiques

Dr. El Mountasar Billah BOUHADJAR

Université de M'Sila

Faculté des Mathématiques et de l'informatique

Département de Mathématiques

E-mail : elmountasarbillah.bouhadjar@univ-msila.dz

5.0 Janvier 2025

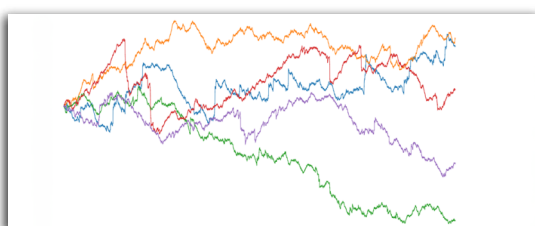


Table des matières

I - Généralités sur les processus stochastiques	3
1. Objectifs du chapitre	3
2. Introduction aux processus stochastiques.....	4
3. Loi d'un processus stochastique.....	6
4. Classification des processus stochastiques.....	6
4.1. processus stationnaire	7
4.2. Processus à accroissements indépendants	8
5. Processus ergodiques.....	8
5.1. Moyennes temporelles et d'ensemble	8
6. Processus gaussiens	9
6.1. Description de la Loi.....	9
7. Test	10
8. Exercice	10
Solutions des exercices	11
Bibliographie	12

Généralités sur les processus stochastiques



Un processus stochastique est un modèle mathématique utilisé pour étudier les phénomènes aléatoires évoluant au cours du temps.

Il offre un cadre permettant d'analyser des situations dont les résultats ne peuvent être prédits avec certitude, comme les fluctuations

du marché boursier ou les phénomènes météorologiques. Ces modèles permettent d'examiner l'évolution d'une variable influencée par l'aléa ou par un grand nombre de facteurs explicatifs difficilement maîtrisables, regroupés sous le terme "aléatoire"

Exemples de Processus Stochastiques

1. **Prix des actions** : Les fluctuations imprévisibles des prix des actions au fil du temps.
2. **Arrivées de clients** : Le nombre de clients arrivant dans un supermarché ou appelant un centre d'assistance à différents moments de la journée.
3. **Phénomènes météorologiques** : Les variations quotidiennes de température ou de précipitations, qui ne peuvent être prédites avec certitude.
4. **Propagation des maladies** : Le nombre de nouvelles infections dans une population pendant une épidémie, influencé par des interactions aléatoires entre les individus.
5. **Flux de trafic** : Le nombre de voitures passant par un feu de signalisation à différents moments de la journée, qui varie de manière aléatoire.
6. **Croissance démographique** : La croissance ou le déclin des populations animales dans un écosystème, influencés par des naissances, des décès ou des migrations aléatoires.
7. **Réseaux de communication** : Le flux de données sur Internet, où les délais et la congestion se produisent de manière aléatoire.
8. **Résultats de jeux** : La séquence des scores ou des événements dans les matchs sportifs, influencée par de nombreux facteurs imprévisibles.
9. **Charge de travail quotidienne** : Les variations du nombre de tâches ou d'emails reçus au travail chaque jour.
10. **Défauts de fabrication** : L'apparition aléatoire de défauts dans les produits pendant un processus de fabrication.

1. Objectifs du chapitre

Les objectifs spécifiques du premier chapitre sont les suivants :

- **Définir** et classer les différents types de processus stochastiques (stationnaires stricts, faiblement stationnaires, processus à accroissements stationnaires).
- **Comprendre** les caractéristiques des processus à accroissements indépendants et des processus récurrents.
- **Expliquer** les notions d'ergodicité et de relations de dépendance.
- **Classer** les processus gaussiens parmi les principales classes de processus stochastiques et décrire leurs propriétés fondamentales.

2. Introduction aux processus stochastiques

(Processus stochastique)



Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est une famille de variables aléatoires X_t indexée par un ensemble $\mathbb{T}$ (souvent associé au temps).

Cas particuliers de l'ensemble $\mathbb{T}$

Si $\mathbb{T} = \mathbb{N}$,	le processus est une suite de variables aléatoires (temps discret).
Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{T} = [0, 1]$,	le processus est continu dans le temps .
Si $\mathbb{T} \subset \mathbb{Z}$	le processus est dit discret .
Si $T \subset \mathbb{R}^d$,	on parle de champ aléatoire (par exemple, un champ aléatoire à deux dimensions lorsque $d = 2$).

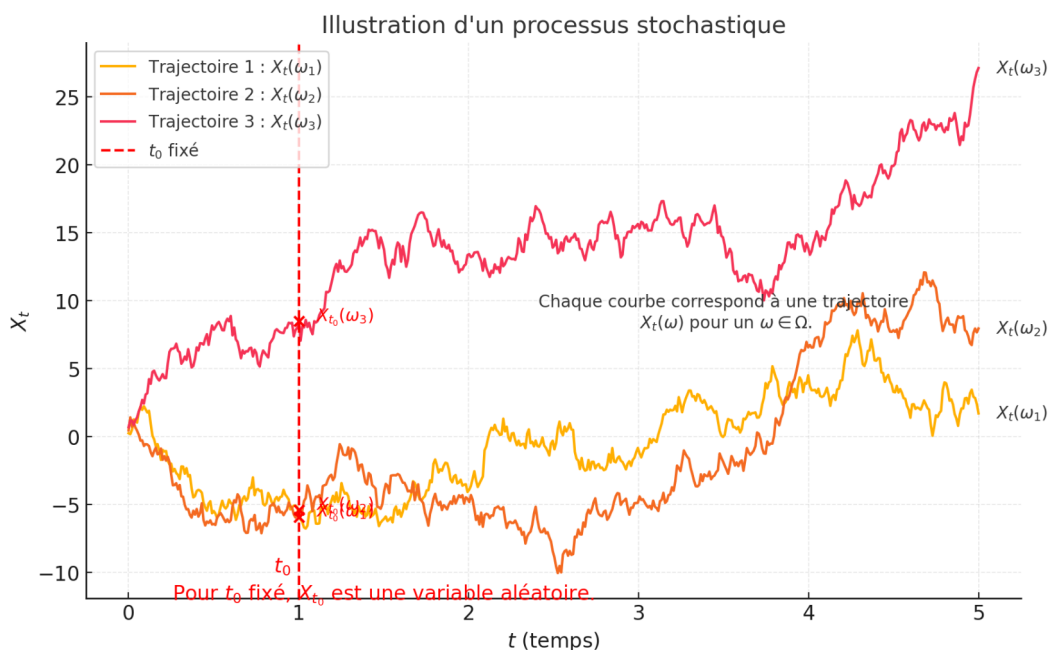
Dépendances : Un processus stochastique dépend de deux paramètres :

1. $t \in \mathbb{T}$, qui représente souvent le **temps**.
2. $\omega \in \Omega$, qui représente le **hasard** ou l'élément aléatoire.

Interprétations

1. **Pour un $t \in \mathbb{T}$ fixé** : $\omega \mapsto X_t(\omega)$ est une **variable aléatoire**, définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
2. **Pour un $\omega \in \Omega$ fixé** :

$t \mapsto X_t(\omega)$ est une **fonction** (appelée **trajectoire du processus**) qui décrit l'évolution de X_t au fil du temps.



On peut donc voir un processus stochastique comme une fonction de deux variables :

$$X : \Omega \times \mathbb{T} \rightarrow E$$

$$(\omega, t) \mapsto X_t(\omega),$$

où E est l'espace d'états du processus.

Dans la suite, sauf mention contraire, on prendra $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{T} = [0, 1]$.

(Filtration)



Définition

Une **filtration** est une suite $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ de σ -algèbres vérifiant la propriété suivante :

$$s \leq t \implies \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}.$$

La notion de filtration permet de formaliser l'idée d'**information accumulée au cours du temps**. Lorsqu'on observe un processus au cours du temps, à la date t , on connaît les valeurs passées du processus X_s pour $s \leq t$ mais **pas encore les valeurs futures** X_s pour $s > t$.

En termes de conditionnement, cela signifie que l'on conditionne souvent par les variables $(X_s)_{s \leq t}$, ou, de façon équivalente, par la σ -algèbre suivante :

$$\mathcal{F}_t := \sigma(X_s, s \leq t).$$

Cette filtration est appelée **filtration canonique** pour le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$. Elle représente les informations obtenues uniquement à partir des valeurs passées du processus.

Idee Clé: Une **filtration** $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ représente donc **l'ensemble des informations disponibles à un instant donné**.



Exemple

Considérons un exemple simple où X_t représente la température d'une ville donnée (en degrés Celsius) à l'heure t .

À une heure donnée t , nous avons accès à :

- Les températures mesurées dans le passé ($s \leq t$),
- Mais nous n'avons pas encore accès aux températures futures ($s > t$).

Dans ce contexte, la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ capture les informations disponibles sur la température jusqu'à l'instant t .

En termes formels, si nous voulons enrichir notre filtration, nous pouvons inclure d'autres variables utiles, par exemple, la vitesse et la direction du vent. Supposons que $(Y_t)_{t \in \mathbb{T}}$ représente la vitesse du vent. La filtration pourrait être définie comme :

$\mathcal{F}_t := \sigma(X_s, Y_s, s \leq t)$, qui inclut les informations sur la température et la vitesse du vent jusqu'à l'instant t .

qui n'est pas la filtration canonique pour le processus (X_t) , car elle intègre également les informations du processus (Y_t) .

(Processus adapté)



Définition

Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est dit **adapté** à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ si, pour tout $t \in \mathbb{T}$, X_t est $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

Autrement dit, à tout instant t , X_t dépend uniquement des informations disponibles dans $\mathcal{F}_t$, la sigma-algèbre représentant les événements connus à cet instant.



Exemple

Prenons $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, et soit $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de moyenne nulle. On définit

$$X_t = \sum_{s=0}^t \varepsilon_s, \quad X_t = \sum_{s=0}^t \varepsilon_s$$

et la filtration canonique associée $\mathcal{F}_t = \sigma(\varepsilon_s : s \leq t)$.

Dans ce cas, le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est **adapté** à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$. En effet, X_t est construit uniquement à partir des variables $\mathcal{E}_s$ pour $s \leq t$, qui appartiennent à $\mathcal{F}_t$.

3. Loi d'un processus stochastique

Définition des distributions finies-dimensionnelles



Définition

Pour tout processus stochastique X , il est associée une famille de distributions finies-dimensionnelles.

$$\mathcal{P}_{t_1, t_2, \dots, t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) \\ := \mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} \in A_2, \dots, X_{t_n} \in A_n), \quad A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

pour tout $t_k \in \mathbb{T}, k = 1, \dots, n$.

Pour un ensemble fixe $(t_1, \dots, t_n)$, l'élément correspondant de cette famille est la distribution finie-dimensionnelle du vecteur aléatoire $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$.

Un processus stochastique X est considéré comme défini si la famille de ses distributions finies-dimensionnelles est donnée. Un processus ayant une famille donnée de distributions finies-dimensionnelles n'est pas unique. Ce processus peut avoir différentes propriétés pour ses trajectoires, et il est souvent souhaitable de choisir celui avec les meilleures propriétés.

Conditions de symétrie et de cohérence



Remarque

Évidemment, la famille des distributions finies-dimensionnelles satisfait les conditions suivantes de symétrie et de cohérence : pour tout $n \geq 2, t_k \in \mathbb{T}, A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), k = 1, \dots, n$,

1. **Symétrie** : $\mathcal{P}_{t_1, t_2, \dots, t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \mathcal{P}_{t_{l_1}, t_{l_2}, \dots, t_{l_n}}(A_{l_1} \times A_{l_2} \times \dots \times A_{l_n})$, où $(l_1, l_2, \dots, l_n)$ est toute permutation de $(1, 2, \dots, n)$.

2. **Cohérence** :

$$\mathcal{P}_{t_1, \dots, t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, \dots, t_n}(A_1 \times \dots \times A_{k-1} \times \mathbb{R} \times A_{k+1} \times \dots \times A_n) \\ = \mathcal{P}_{t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n}(A_1 \times \dots \times A_{k-1} \times A_{k+1} \times \dots \times A_n),$$

pour tout $1 \leq k \leq n$.

Théorème de Kolmogorov



Fondamental

Soit une famille de distributions finies-dimensionnelles

$$\mathcal{P}_{t_1, t_2, \dots, t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n)$$

satisfaisant les conditions de symétrie et de cohérence. Alors, il existe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un processus X , défini sur cet espace, dont la famille des distributions finies-dimensionnelles coïncide avec la famille donnée.

4. Classification des processus stochastiques

Nous introduisons ici les notations suivantes, qui seront utilisées dans les développements à venir :

1. $m_t := \mathbb{E}[X_t], \quad \forall t \in \mathbb{T}, \quad (\text{l'espérance de } X_t),$
2. $\mu_{t,s} := \mathbb{E}[X_t X_s], \quad \forall t, s \in \mathbb{T}, (\text{l'espérance du produit de } X_t \text{ et } X_s),$
3. $\nu_{t,s} := \text{Cov}(X_t, X_s) = \mu_{t,s} - m_t m_s, \quad \forall t, s \in \mathbb{T}, (\text{la covariance de } X_t \text{ et } X_s)$

4.1. processus stationnaire

(Stationnarité stricte)



Un processus X est dit strictement stationnaire si ses distributions fini-dimensionnelles sont invariantes sous tout décalage du paramètre appartenant à l'ensemble de paramètres.

En d'autres termes, la distribution de dimension finie du vecteur aléatoire $X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h}$ est indépendante de h , c'est-à-dire qu'elle a la même distribution que $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$.

(Stationnarité faible)



Un processus du second ordre (c-à-d) $\forall t \in \mathbb{T}, \mathbb{E}[X_t^2] < +\infty$ est dit faiblement stationnaire si :

1. L'espérance est constante dans le temps :
 $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_{t+h}], \quad \forall t, h \in \mathbb{T}, \text{ tel que } t+h \in \mathbb{T}.$
2. La covariance dépend seulement de la différence entre t et $t+h$, c'est-à-dire de h , pas de t :
 $\mu_{t,t+h} = \mathbb{E}[X_t X_{t+h}]$ indépendant de t .

Cela se traduit par :

$$\begin{cases} \mu_{t,t+h} = \mu_h, \\ \mu_{t,s} = \mu_{s-t}, \quad \forall t, s \in \mathbb{T}. \end{cases}$$

? Exemple

Soient $a > 0, b > 0$, et $Y \sim \mathcal{U}([0, 2\pi])$, une variable aléatoire uniforme indépendante du temps. On considère le processus :

$$X_t := a \sin(bt + Y), \quad t \in \mathbb{R}$$

Ce processus est **faiblement stationnaire**, car : $m_t = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(bt + y) dy = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$

et pour tout $t, s \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \mu_{t,s} &= \mathbb{E}[X_t X_s] \\ &= a^2 \mathbb{E}[\sin(bt + Y) \sin(bs + Y)] \\ &= \frac{a^2}{2} (\mathbb{E}[\cos(b(t+s) + 2Y)] - \mathbb{E}[\cos(b(s-t))]) \\ &= \frac{a^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos(b(t+s) + 2y) dy - \frac{a^2}{2} \cos(b(s-t)) \\ &= \frac{a^2}{8\pi} [\sin(b(t+s) + 2y)]_0^{2\pi} - \frac{a^2}{2} \cos(b(s-t)) \\ &= 0 - \frac{a^2}{2} \cos(b(s-t)) \\ &= \mu_{s-t}. \end{aligned}$$

Comme nous le voyons, les deux conditions sont satisfaites, donc $X(t)$ est un processus faiblement stationnaire.

Les différences $X_s - X_t$ pour $t < s$, sont appelées les accroissements du processus.

(accroissements stationnaires)**Définition**

Un processus X est dit à accroissements stationnaires si la distribution des accroissements $X_{t+h} - X_t$ ne dépend pas de $t > 0$.

Autrement dit, $X_{t+h} - X_t$ suit la même distribution que X_h .

4.2. Processus à accroissements indépendants**Définition**

Un processus X est appelé processus à accroissements indépendants si pour toute collection de temps croissants, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, les variables X_{t_0} , $X_{t_1} - X_{t_0}$, $X_{t_2} - X_{t_1}$, $\dots$, $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

5. Processus ergodiques

Un processus ergodique est un processus stochastique pour lequel les statistiques globales, comme l'espérance ou la variance, peuvent être estimées à partir des moyennes temporelles calculées sur une seule trajectoire suffisamment longue.

Autrement dit, si on observe une trajectoire $\{X_t(\omega_0)\}$, les propriétés statistiques du processus, telles que son espérance ou sa variance, peuvent être déduites de cette seule observation, à condition que la durée d'observation soit grande. Cette propriété est utile en pratique, car elle permet d'éviter d'avoir à observer plusieurs réalisations du processus.

5.1. Moyennes temporelles et d'ensemble

Pour mieux comprendre cette idée, distinguons deux types de moyennes :

- **Moyenne d'ensemble** : obtenue en moyennant sur toutes les réalisations possibles du processus. Par exemple, l'espérance mathématique $\mathbb{E}[X_t]$.
- **Moyenne temporelle**: obtenue en moyennant les valeurs d'une seule trajectoire sur une période suffisamment longue.

Pour un processus à temps continu, la moyenne temporelle est définie par :

$$\bar{X}_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X_t(\omega_0) dt,$$

où $T > 0$ représente la durée d'observation.

Processus ergodique de moyenne**Définition**

Un processus stationnaire X est dit **ergodique en moyenne** si sa moyenne temporelle converge vers sa moyenne statistique, notée m_X , lorsque l'intervalle d'observation T tend vers l'infini. Plus précisément :

- La condition d'ergodicité est : $\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{X}_T = m_X$.

Processus ergodique pour l'autocorrélation**Définition**

Un processus stationnaire X est dit **ergodique pour l'autocorrélation** si l'autocorrélation temporelle calculée sur une seule réalisation (ou trajectoire) du processus converge vers l'autocorrélation statistique d'ensemble lorsque l'intervalle d'observation tend vers l'infini.

- L'autocorrélation temporelle pour un décalage τ et une réalisation fixée ω_0 est donnée par :

$$\mu_X(\tau, T, \omega_0) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X_t(\omega_0) X_{t+\tau}(\omega_0) dt,$$

Le processus est ergodique pour l'autocorrélation si :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mu_X(\tau, T, \omega_0) = \mathbb{E}[X_t X_{t+\tau}] = \mu_X(\tau).$$

6. Processus gaussiens

Tout d'abord, rappelons quelques faits fondamentaux sur les variables aléatoires gaussiennes.

Vecteurs gaussiens



Définition

Un vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ est appelé **gaussien** si toute combinaison linéaire $\sum_{i=1}^n a_i X_i$, avec $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, suit une loi normale.

6.1. Description de la Loi

La distribution de X est entièrement décrite par :

- **Son vecteur d'espérance** : $\mathbb{E}[X]$, noté m
- **Sa matrice de covariance** : Γ , définie par

$$\Gamma = [\nu_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq n},$$

$$\text{où } \nu_{i,j} = \mathbb{E}[X_i X_j] - \mathbb{E}[X_i] \mathbb{E}[X_j].$$

Si Γ est inversible, alors X possède une densité.

$$f_X(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det \Gamma}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \Gamma^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}) \right\}.$$

Propriétés Fondamentales



Fondamental

1. Indépendance et Covariance

Si deux variables gaussiennes X_i et X_j ont une covariance nulle, alors elles sont indépendantes.

2. Linéarité

- Si (X, Y) est un vecteur gaussien, il existe une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $X - \alpha Y$ est indépendant de Y .
- X et Y sont indépendantes, alors toute combinaison $aX + bY$ reste une variable gaussienne.

3.

- Pour des variables aléatoires gaussiennes dépendantes, une combinaison linéaire $aX + bY$ peut ne pas être gaussienne. Cependant, si elles sont indépendantes, cette propriété est toujours vérifiée.

Proposition**Fondamental**

Soit X une variable aléatoire gaussienne de paramètres (m, v^2) , c'est-à-dire $X \sim \mathcal{N}(m, v^2)$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E} \left[e^{\lambda X} \right] = \exp \left(\lambda m + \frac{\lambda^2 v^2}{2} \right).$$

Réciproquement, si X satisfait :

$$\mathbb{E} \left[e^{\lambda X} \right] = \exp \left(\lambda m + \frac{\lambda^2 v^2}{2} \right),$$

alors X suit une loi normale $\mathcal{N}(m, v^2)$.

Processus Gaussien**Définition**

Un processus stochastique X est dit **gaussien** si toute combinaison linéaire finie des variables $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est une variable aléatoire suivant une loi normale. Autrement dit, cela signifie que :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall 1 \leq i \leq n, \forall t_i \in \mathbb{T}, \forall a_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n a_i X_{t_i}$ est une variable aléatoire gaussienne.

La matrice de covariance $\Gamma := \left[v_{t_i, t_j} \right]_{1 \leq i, j \leq n}$ est une matrice symétrique semi-définie positive.

7. Test**8. Exercice**

[solution n°1 p. 11]

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ et $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}}$ deux processus aléatoires tels que :

$$X_t = (-1)^t Y_t,$$

où $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est un processus faiblement stationnaire **FS** vérifiant :

$$m_Y(t) := \mathbb{E}[Y_t] = 0, \quad v_Y(t, s) := \text{cov}(Y_t, Y_s) = \sigma \mathbf{1}_{\{s=t\}}.$$

On définit un nouveau processus $(Z_t)_{t \in \mathbb{N}}$ par :

$$Z_t = X_t + Y_t.$$

Le processus $(Z_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est-il faiblement stationnaire (**FS**) ?

☐ Vrai

☐ Faux

Solutions des exercices



[exercice p. 10]

Solution n°1

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ et $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}}$ deux processus aléatoires tels que :

$$X_t = (-1)^t Y_t,$$

où $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est un processus faiblement stationnaire **FS** vérifiant :

$$m_Y(t) := \mathbb{E}[Y_t] = 0, \quad \nu_Y(t, s) := \text{cov}(Y_t, Y_s) = \sigma \mathbf{1}_{\{s=t\}}.$$

On définit un nouveau processus $(Z_t)_{t \in \mathbb{N}}$ par :

$$Z_t = X_t + Y_t.$$

Le processus $(Z_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est-il faiblement stationnaire (**FS**) ?

- ☐ Vrai
- ☒ Faux

Bibliographie



Grimmett, G., & Stirzaker, D. (2001). Probability and Random Processes. Oxford University Press.

Ross, S. M. (2014). Introduction to Probability Models. Academic Press.

Karlin, S., & Taylor, H. (1998). A First Course in Stochastic Processes. Academic Press.