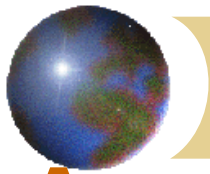


CHAPITRE 7

Analyse des Correspodances Multiples (ACM)

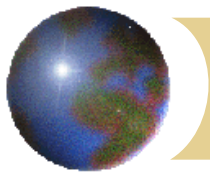


Analyse des correspondances multiples

But on veut étendre l'AFC au cas de $p \geq 2$ variables $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_p$ à $m_1, m_2, \dots, m_p$ modalités. Ceci est particulièrement utile pour l'exploration d'enquêtes où les questions sont à réponses multiples.

Problème l'analyse des correspondances utilise une table de contingence qui est difficilement généralisable au cas $p > 2$.

Méthode on cherche un moyen différent de calculer l'AFC pour $p = 2$ et on vérifie que les résultats sont comparables. Si on a de la chance, on pourra étendre cette nouvelle version pour $p > 2$.



Les données

Données brutes chaque individu est décrit par les numéros pour chacune des p variables des modalités qu'il possède. Il n'est pas possible de faire des calculs sur ce tableau, où les valeurs sont arbitraires.

Tableau disjonctif on remplace la j ème colonne par m_j colonnes d'indicatrices : on met un zéro dans chaque colonne, sauf celle correspondant à la valeur x_i^j de l'individu i qui reçoit 1.

Exemple On a trois variables (avec respectivement 3, 2 et 2 modalités) mesurées sur 4 individus. Les tableaux brut (ci-dessous à gauche) sont équivalents aux tableaux disjonctifs à droite.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

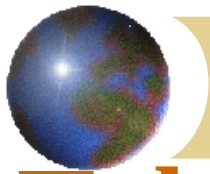


Tableau disjonctif et tableau de contingence

Tableau disjonctif à la variable $\mathcal{X}_j$ on associe le tableau disjonctif $\mathbf{X}_j$ à n lignes et m_j colonnes.

Tableau de contingence on vérifie facilement que le tableau de contingence des variables $\mathcal{X}_j$ et $\mathcal{X}_k$ est donné par

$$\mathbf{N}_{jk} = \mathbf{X}_j' \mathbf{X}_k.$$

Effectifs marginaux la matrice diagonale des effectifs marginaux de la variable $\mathcal{X}_j$ est donnée par

$$\mathbf{D}_j = \mathbf{X}_j' \mathbf{X}_j.$$

Exemple $\mathbf{N}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

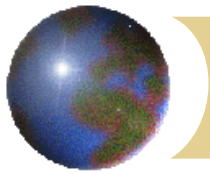


Tableau disjonctif joint

Définition c'est la matrice juxtaposée $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1 | \mathbf{X}_2 | \cdots | \mathbf{X}_p)$, qui possède n lignes et $m_1 + \cdots + m_p$ colonnes. On va la considérer comme un tableau de contingence et lui appliquer une analyse de correspondances.

Les lignes la somme des éléments de chaque ligne de $\mathbf{X}$ est égale à p . Le tableau des profils-lignes est donc $\frac{1}{p}\mathbf{X}$.

Les colonnes la somme des éléments de chaque colonne de $\mathbf{X}$ est égale à l'effectif marginal de la modalité correspondante. Le tableau des profils colonnes est donc $\mathbf{X}\mathbf{D}^{-1}$, où $\mathbf{D}$ est la matrice diagonale par blocs

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{D}_p \end{pmatrix}$$

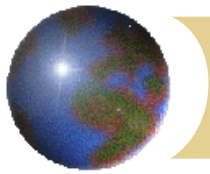


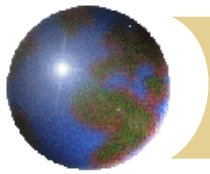
Tableau disjonctif joint (suite)

Exemple pour l'exemple de variables précédentes, on a le tableau disjonctif joint suivant

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Marges Chaque somme de lignes vaut 3. Les sommes de colonnes valent

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|cc} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right)$$



Cas $p = 2$

On applique l'analyse des correspondances de $\mathbf{X}$; on cherche les composantes principales de l'ACP en colonnes. Elles sont vecteurs propres de

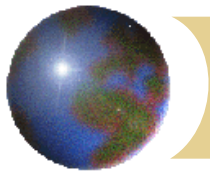
$$(\mathbf{X}\mathbf{D}^{-1})'\frac{1}{2}\mathbf{X} = \frac{1}{2}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}$$

Or on a

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}'_1 \\ \mathbf{X}'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}'_1\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}'_1\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}'_2\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}'_2\mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}' & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix}$$

Finalement, les composantes principales sont valeurs propres de

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}' & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_1} & \mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N} \\ \mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}' & \mathbf{I}_{m_2} \end{bmatrix}.$$



Résolution des équations

On note **a** (resp. **b**) les m_1 premières (resp. m_2 dernières) coordonnées de la composante principale recherchée et μ la valeur propre correspondante :

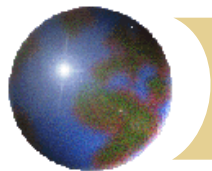
$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_1} & \mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N} \\ \mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}' & \mathbf{I}_{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = 2\mu \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

On obtient les équations

$$\begin{cases} \mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}\mathbf{b} = (2\mu - 1)\mathbf{a} \\ \mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'\mathbf{a} = (2\mu - 1)\mathbf{b} \end{cases},$$

et donc on retrouve les coordonnées des lignes et des colonnes de **N** dans l'AFC classique (avec $\lambda = (2\mu - 1)^2$) :

$$\begin{cases} \mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}\mathbf{b} = (2\mu - 1)^2\mathbf{b} \\ \mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}\mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'\mathbf{a} = (2\mu - 1)^2\mathbf{a} \end{cases}.$$



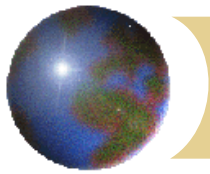
Le nombre de valeurs propres

Problème on a *a priori* $m_1 + m_2 - 1$ valeurs propres non nulles, ce qui est plus important que dans le cas classique. En particulier pour chaque λ , on a deux μ possibles

$$\begin{cases} \mu = \frac{1+\sqrt{\lambda}}{2} & \text{associée à } \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \\ \mu = \frac{1-\sqrt{\lambda}}{2} & \text{associée à } \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ -\mathbf{b} \end{pmatrix} \end{cases}$$

On ne garde donc que les valeurs $\mu > \frac{1}{2}$. On peut montrer qu'il y en a $\min(m_1 - 1, m_2 - 1)$.

Interprétation L'interprétation de la part d'inertie expliquée par les valeurs propres est maintenant très différent. En particulier les valeurs propres qui étaient très séparées dans l'AFC de $\mathbf{N}$ ne le beaucoup moins dans celle de $\mathbf{X}$.



Le cas général $p > 2$

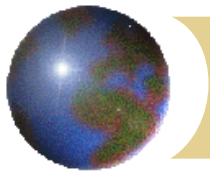
But on cherche à faire une représentation des $m_1 + \dots + m_p$ catégories comme points d'un espace de faible dimension.

Méthode on fait une AFC sur le tableau disjonctif joint $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1 | \mathbf{X}_2 | \dots | \mathbf{X}_p)$, qui possède n lignes et $m_1 + \dots + m_p$ colonnes.

Le tableau de Burt c'est le tableau $\mathbf{B} = \mathbf{X}'\mathbf{X}$, qui est une super-tableau de contingence des variables $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_p$:

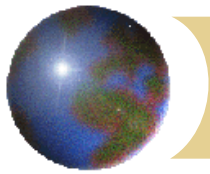
$$\mathbf{B} = \mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}'_1\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}'_1\mathbf{X}_2 & \cdots & \mathbf{X}'_1\mathbf{X}_p \\ \mathbf{X}'_2\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}'_2\mathbf{X}_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{X}'_p\mathbf{X}_1 & \cdots & & \mathbf{X}'_p\mathbf{X}_p \end{bmatrix}$$

ou on rappelle que $\mathbf{X}'_i\mathbf{X}_i = \mathbf{D}_i$. Le tableau de Burt est donc formé de tableaux de contingence et de matrices d'effectifs marginaux.



Exemple de tableau de Burt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



Les coordonnées factorielles des catégories

Notation On note $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p)'$ le vecteur à $m_1 + \dots + m_p$ composantes des coordonnées factorielles des catégories de toutes les variables sur un axe.

Calcul de l'AFC sur X comme la matrice des profils lignes est $\frac{1}{p}\mathbf{X}$ et celle des profils colonnes $\mathbf{XD}^{-1}$, $\mathbf{a}$ est vecteur propre de

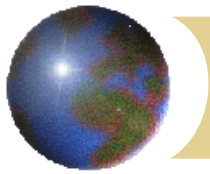
$$(\mathbf{XD}^{-1})' \frac{1}{p} \mathbf{X} = \frac{1}{p} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{X} = \frac{1}{p} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B}$$

et donc l'équation des coordonnées des catégories est

$$\frac{1}{p} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{a} = \mu \mathbf{a}$$

avec la convention de normalisation

$$\frac{1}{np} \mathbf{a}' \mathbf{D} \mathbf{a} = \mu.$$



Formules barycentriques

Les coordonnées des individus Soit $\mathbf{z}$ le vecteur à n composantes des coordonnées des n individus sur un axe factoriel associé à la valeur propre μ . D'après les résultats de sur l'AFC, on a

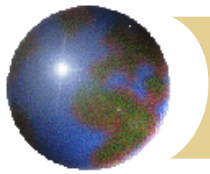
$$\mathbf{z} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \mathbf{X} \mathbf{a}$$

On a donc la normalisation

$$V(\mathbf{z}) = \frac{1}{n} \mathbf{z}' \mathbf{z} = \frac{1}{\mu n p^2} \mathbf{a}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \mathbf{a} = \frac{1}{\mu n p^2} \mathbf{a}' (p \mu \mathbf{D} \mathbf{a}) = \frac{1}{n p} \mathbf{a}' \mathbf{D} \mathbf{a} = \mu$$

Les seuls termes non nuls dans le calcul de $\mathbf{X} \mathbf{a}$ sont les coordonnées de la catégorie de chaque variable possédée par l'individu.

Barycentre des catégories À $1/\sqrt{\mu}$ près, la coordonnée d'un individu est égale à la moyenne arithmétique simple des coordonnées des catégories auxquelles il appartient.



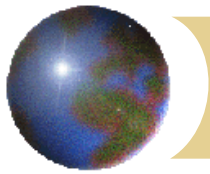
Formules barycentriques (suite)

On a de même la seconde formule

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{z}$$

Les seuls termes non nuls de $\mathbf{X}' \mathbf{z}$ sont les coordonnées des individus ayant une modalité donnée.

Barycentre des individus À $1/\sqrt{\mu}$ près, la coordonnée d'une catégorie est égale à la moyenne arithmétique des coordonnées des n_j individus de cette catégorie.



Propriétés des valeurs propres

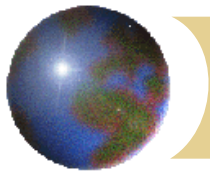
Valeur propres triviales La valeur propre 1 est associée (comme en AFC) aux composantes $\mathbf{z}^0 = (1, \dots, 1)$ dans l'espace des individus. Les autres vecteurs propres lui sont orthogonaux, et donc de moyenne nulle.

Autres valeurs propres Si $n > \sum_{i=1}^p m_i$, le rang de $\mathbf{X}$ est $\sum_{i=1}^p m_i - p + 1$ et le nombre de valeurs propres non trivialement égales à 0 ou 1 est $q = \sum_{i=1}^p m_i - p$.

Somme La somme des valeurs propres non triviales est donc

$$\sum_{k=1}^q \mu_k = \text{Trace} \left(\frac{1}{p} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B} \right) - 1 = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p m_i - 1 = \frac{q}{p}$$

La moyenne des q valeurs propres vaut $1/p$.



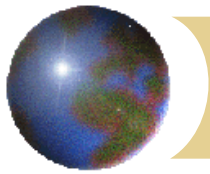
Barycentres et représentation

Représentation commune Les points représentatifs des catégories sont barycentres des groupes d'individus. On peut donc représenter individus et catégories dans un même plan factoriel.

Moyennes Comme $\mathbf{z}$ est une variable de moyenne nulle, la formule de barycentre indique que pour chaque variable $\mathcal{X}_i$, les coordonnées de ses catégories (pondérés par les effectifs) sont de moyenne nulle. Aucun centrage n'est donc nécessaire

Échelle pour que les catégories se trouvent visuellement au barycentre des individus qui les représentent on peut remplacer $\mathbf{a}$ par

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{z} = \sqrt{\mu} \mathbf{a}$$



Variables et axes factoriels

Si n_j est l'effectif de la catégorie j et a_j sa coordonnée sur l'axe factoriel associé à μ , alors

$$\frac{1}{np} \sum_{j \in \text{modalités}} n_j (a_j)^2 = \mu$$

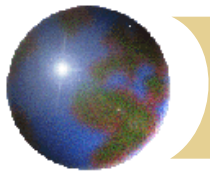
Catégorie La contribution de la catégorie j à l'axe factoriel est

$$\frac{1}{\mu np} n_j (a_j)^2,$$

intéressante si elle est supérieure au poids n_j/np .

Variable la contribution totale de la variable $\mathcal{X}_i$ à l'axe factoriel est

$$\frac{1}{\mu np} \sum_{j \text{ modalité de } \mathcal{X}_i} n_j (a_j)^2$$



Individus et axes factoriels

La normalisation de $\mathbf{z}$ est $\sum_{i=1}^n (z_i)^2 = n\mu$, où z_i est la coordonnée de l'individu i sur l'axe factoriel associé à la valeur propre μ .

Contribution d'un individu elle est égale à pour l'individu i à

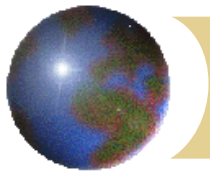
$$\frac{1}{n\mu}(z_i)^2$$

Cette contribution est jugée en la comparant au poids $1/n$.

Qualité de la représentation pour le sous-espace formé par les ℓ premiers axes, c'est le cosinus carré habituel

$$\frac{\sum_{k=1}^{\ell} \left(z_i^{(k)} \right)^2}{\sum_{k=1}^q \left(z_i^{(k)} \right)^2}$$

où l'exposant (k) correspond aux différents axes factoriels.



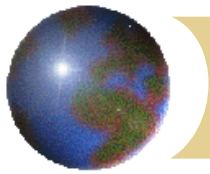
Contribution à l'inertie totale

Soit $\mathbf{x}^j = (x_i^j)$ le vecteur colonne de $\mathbf{X}$ correspondant à une catégorie j . On rappelle que l'inertie totale vaut

$$\sum_{j \in \text{modalités}} \frac{n_j}{np} d^2(j, \mathbf{g}) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p m_i - 1$$

La distance du profil-colonne j au centre de gravité des profils-colonnes $\mathbf{g} = \mathbf{1}/n$ est

$$\begin{aligned} d^2(j, \mathbf{g}) &= \sum_{i=1}^n \frac{np}{p} \left(\frac{x_i^j}{n_j} - \frac{1}{n} \right)^2 = n \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i^j}{n_j^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{2x_i^j}{nn_j} \right) \\ &= \frac{n}{n_j} - 1 \end{aligned}$$



Contribution à l'inertie totale (suite)

Contribution d'une catégorie La contribution absolue de la catégorie à l'inertie est

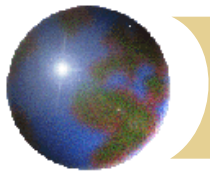
$$\frac{n_j}{np} d^2(j, \mathbf{g}) = \frac{1}{p} \left(1 - \frac{n_j}{n} \right),$$

qui est une fonction décroissante de l'effectif. Il faut donc éviter les catégories d'effectif trop faible, qui d'ailleurs se retrouveront dans les premiers axes

Contribution d'une variable La contribution de la variable $\mathcal{X}_i$ est

$$\sum_{j \text{ modalité de } \mathcal{X}_i} \frac{1}{p} \left(1 - \frac{n_j}{n} \right) = \frac{m_i - 1}{p}$$

Elle est d'autant plus grande que le nombre de modalités est élevé. Il faut donc éviter les disparités trop grandes entre les nombre de modalités (quand on a le choix du découpage...)



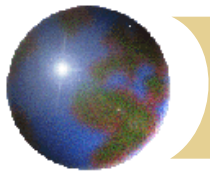
Les variables supplémentaires

Leur usage est très courant en analyse des correspondances multiples.

Variables qualitatives on les place directement sur la projection sur un plan factoriel en utilisant la formule de barycentre des individus : si on veut placer une variable supplémentaire de tableau disjonctif $\mathbf{X}_{\text{sup}}$ et d'effectifs marginaux $\mathbf{D}_{\text{sup}}$, on calcule les coordonnées de ses modalités sur un axe principal par

$$\mathbf{a}_{\text{sup}} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \mathbf{D}_{\text{sup}}^{-1} \mathbf{X}_{\text{sup}}' \mathbf{z}$$

Variables quantitatives on calcule « à la main » leur corrélation avec les axes factoriels et on les place sur un cercle de corrélations. On peut aussi les découper en classes et les traiter comme des variables qualitatives.



Valeurs-test pour les variables supplémentaires

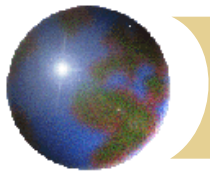
But on cherche à savoir si une variable supplémentaire est liée à un axe donné.

Idée du calcul si les n_i individus d'une catégorie étaient pris au hasard, la moyenne de leurs coordonnées serait une variable aléatoire centrée (les z sont de moyenne nulle) et de variance $\frac{\mu}{n_j} \frac{n - n_j}{n - 1}$. De plus, la moyenne des coordonnées est égale à $\sqrt{\mu} a_j$.

Valeur-test c'est la version centrée et réduite de la moyenne des coordonnées

$$a_j \sqrt{n_j} \sqrt{\frac{n - 1}{n - n_j}}.$$

Quand n_j est assez grand, elle est significative si elle est supérieure à 2 ou 3 . On ne doit pas l'utiliser sur les variables actives.



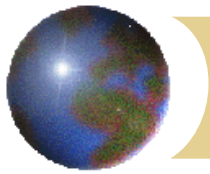
Correspondances multiples et ACP non linéaire

Problème l'ACP vise à trouver une combinaison *linéaire* $u_1\mathbf{x}^1 + \dots + u_p\mathbf{x}^p$ des variables qui soit de variance maximale. Si les relations entre variables ne sont pas linéaires, l'ACP échoue à extraire des données intéressantes.

Extension non-linéaire on cherche des fonctions $\phi^1, \dots, \phi^p$ qui maximisent la variance

$$V(\phi^1(\mathbf{x}^1) + \dots + \phi^p(\mathbf{x}^p))$$

Fonctions en escalier On peut prendre des fonctions en escalier : on découpe l'intervalle de variation de $\mathbf{x}^j$ en m_j classes et on se donne un vecteur $\mathbf{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{jm_j})$ de poids. Alors $\phi^j(x) = a_{j\ell}$ si x est dans la ℓ -ième classe.



Correspondances multiples et ACP non linéaire

Discrétisation des variables on définit le tableau disjonctif $\mathbf{X}_j$ indiquant quelle modalité (classe) de la variable j est prise par chaque individu. Alors

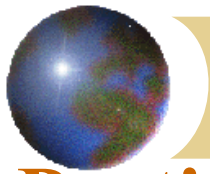
$$\phi^j(\mathbf{x}^j) = \mathbf{X}_j \mathbf{a}_j.$$

Reformulation de l'ACP non-linéaire on cherche le vecteur $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p)$ qui maximise la variance

$$V(\mathbf{X}_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{X}_p \mathbf{a}_p) = V(\mathbf{X} \mathbf{a})$$

La solution est la première composante de l'ACM du tableau disjonctif joint $\mathbf{X}$.

Conclusion le découpage en classes des variables numériques permet d'obtenir une analyse non linéaire des données. Elle n'est possible que si on a suffisamment d'observations par classe.



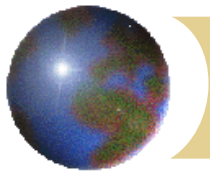
Pratique de l'analyse des correspondances multiples

Sélection des variables on décide souvent de ne garder qu'un nombre réduit de variables actives et de garder les autres comme variables supplémentaires.

Sélection des axes

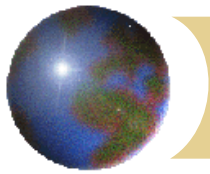
- règle courante : garder les axes tels que $\mu > 1/p$ (la moyenne des valeurs propres est $1/p$).
- les axes intéressants sont ceux que l'on peut interpréter, en regardant les contributions des variables actives et les valeurs-tests associées aux variables supplémentaires.
- En pratique on se contente souvent d'interpréter le premier plan principal.

Inertie expliquée elle est moins intéressante qu'en ACP.



Points communs entre AFC et ACM

	AFC/ACM
But	Décrire les liaisons entre plusieurs variables qualitatives
Cas $p = 2$	Les coordonnées des modalités sont les mêmes pour les deux analyses
Représentation	Toutes les modalités peuvent être représentées sur le même diagramme
Contribution d'une modalité à un axe	$\text{poids} \times \frac{(\text{coordonnée})^2}{\text{valeur propre}}$
Qualité de la représentation d'une modalité par un sous espace	$\cos^2 \theta = \frac{\sum_{\text{axes du sous esp.}} (\text{coord sur l'axe})^2}{\sum_{\text{tous les axes}} (\text{coord sur l'axe})^2}$



Différences entre AFC et ACM

	AFC	ACM
Analyse des individus	Non	Oui
Données	Tableau de contingence Profils lignes/colonnes	Tableau disjonctif Tableau de Burt
Poids d'une modalité	$\frac{n_{i.}}{n}$ (profil-ligne) $\frac{n_{.j}}{n}$ (profil-colonne)	$\frac{n_j}{np}$
Nb de val. propres	$\min(m_1 - 1, m_2 - 1)$	$\sum_{i=1}^p m_i - p$
Axes à conserver	Pas de règle Kaiser ; peut-être part d'inertie.	$\mu > \frac{1}{p}$
Variables supplémentaires	Pas vraiment de sens	Qualitatives et quantitatives