

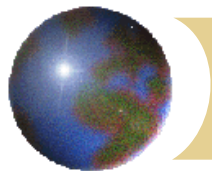


Département Maths

Spécialité: Maths Appliquées

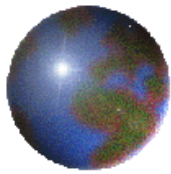
CHAPITRE 1

Rappels de Mathématiques



Notations

Dans tout ce qui suit, E et F sont deux espaces vectoriels réels munis respectivement des bases canoniques $\mathcal{E} = \{e_j ; j = 1, \dots, p\}$ et $\mathcal{F} = \{f_i ; i = 1, \dots, n\}$. On note indifféremment soit un vecteur de E ou de F , un endomorphisme de E , ou une application linéaire de E dans F , soit leurs représentations matricielles dans les bases définies ci-dessus.



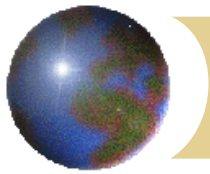
Matrices

La matrice d'ordre $(n \times p)$ associée à une application linéaire de E dans F est décrite par un tableau :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^j & \dots & a_1^p \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_i^1 & \dots & a_i^j & \dots & a_i^p \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \dots & a_n^j & \dots & a_n^p \end{bmatrix}.$$

On note par la suite :

$$\begin{aligned} a_i^j &= [\mathbf{A}]_i^j \text{ le terme général de la matrice,} \\ \mathbf{a}_i &= [a_i^1, \dots, a_i^p]' \text{ un vecteur-ligne mis en colonne,} \\ \mathbf{a}^j &= [a_1^j, \dots, a_n^j]' \text{ un vecteur-colonne.} \end{aligned}$$



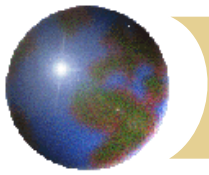
Types de matrices

Une matrice est dite :

- *vecteur-ligne (colonne)* si $n = 1$ ($p = 1$),
- *vecteur-unité* d'ordre p si elle vaut $\mathbf{1}_p = [1, \dots, 1]'$,
- *scalaire* si $n = 1$ et $p = 1$,
- *carrée* si $n = p$.

Une matrice carrée est dite :

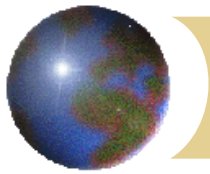
- *identité* ($\mathbf{I}_p$) si $a_i^j = \delta_i^j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$,
- *diagonale* si $a_i^j = 0$ lorsque $i \neq j$,
- *symétrique* si $a_i^j = a_j^i, \forall (i, j)$,
- *triangulaire supérieure (inférieure)* si $a_i^j = 0$ lorsque $i > j$ ($i < j$).



Matrice partitionnée en blocs

Matrices dont les éléments sont eux-mêmes des matrices. Exemple :

$$\mathbf{A}(n \times p) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^1(r \times s) & \mathbf{A}_1^2(r \times (p - s)) \\ \mathbf{A}_2^1((n - r) \times s) & \mathbf{A}_2^2((n - r) \times (p - s)) \end{bmatrix}.$$



Opérations sur les matrices

Somme : $[A + B]_i^j = a_i^j + b_i^j$ pour A et B de même ordre $(n \times p)$.

Multiplication par un scalaire : $[\alpha A]_i^j = \alpha a_i^j$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Transposition : $[A']_i^j = a_j^i$, A' est d'ordre $(p \times n)$.

$$(A')' = A ; (A + B)' = A' + B' ; (AB)' = B' A' ;$$

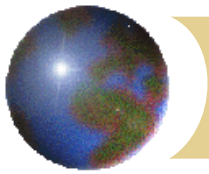
$$\begin{bmatrix} A_1^1 & A_1^2 \\ A_2^1 & A_2^2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} A_1^{1'} & A_2^{1'} \\ A_1^{2'} & A_2^{2'} \end{bmatrix}.$$

Produit scalaire élémentaire : $a'b = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ où a et b sont des vecteurs-colonnes.

Produit : $[AB]_i^j = a_i' b^j$ avec $A_{(n \times p)}$, $B_{(p \times q)}$ et $AB_{(n \times q)}$, et pour des matrices par blocs :

$$\begin{bmatrix} A_1^1 & A_1^2 \\ A_2^1 & A_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1^1 & B_1^2 \\ B_2^1 & B_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^1 B_1^1 + A_1^2 B_2^1 & A_1^1 B_1^2 + A_1^2 B_2^2 \\ A_2^1 B_1^1 + A_2^2 B_2^1 & A_2^1 B_1^2 + A_2^2 B_2^2 \end{bmatrix}$$

sous réserve de compatibilité des dimensions.



Trace d'une matrice

Par définition, si A est une matrice $(p \times p)$,

$$\text{tr} A = \sum_{j=1}^p a_j^j,$$

et il est facile de montrer :

$$\text{tr} \alpha = \alpha,$$

$$\text{tr} \alpha A = \alpha \text{tr} A,$$

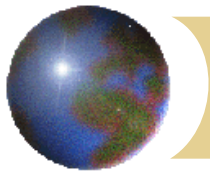
$$\text{tr}(A + B) = \text{tr} A + \text{tr} B,$$

$$\text{tr} AB = \text{tr} BA,$$

reste vrai si A est $(n \times p)$ et si B est $(p \times n)$

$$\text{tr} CC' = \text{tr} C'C = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (c_i^j)^2$$

dans ce cas, C est $(n \times p)$.



Déterminant d'une matrice

On note $|A|$ le *déterminant* de la matrice carrée A ($p \times p$). Il vérifie :

$$|A| = \prod_{j=1}^p a_j^j, \text{ si } A \text{ est triangulaire ou diagonale,}$$

$$|\alpha A| = \alpha^p |A|,$$

$$|AB| = |A||B|,$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = |A||C|,$$

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 \\ A_2^1 & A_2^2 \end{vmatrix} = |A_1^1| |A_2^2 - A_2^1 (A_1^1)^{-1} A_1^2| \quad (1)$$

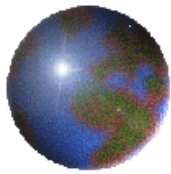
$$= |A_2^2| |A_1^1 - A_1^2 (A_2^2)^{-1} A_2^1|, \quad (2)$$

sous réserve de la régularité de A_1^1 et A_2^2 .

Cette dernière propriété se montre en considérant les matrices :

$$B = \begin{bmatrix} I & -A_1^2 (A_2^2)^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \text{ et } BAB',$$

puis en comparant les déterminants $|BAB'|$ et $|A|$.



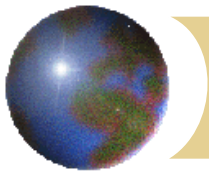
Inverse d'une matrice

L'inverse de A , lorsqu'elle existe, est la matrice unique notée A^{-1} telle que :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I;$$

elle existe si et seulement si $|A| \neq 0$. Quelques propriétés :

$$(A^{-1})' = (A')^{-1}, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$



Définitions

Une matrice carrée A est dite :

symétrique si $A' = A$,

singulière si $|A| = 0$,

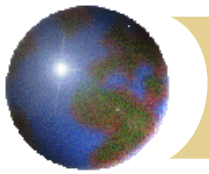
régulière si $|A| \neq 0$,

idempotente si $AA = A$,

définie-positive si, $\forall x \in \mathbb{R}^p, x'Ax \geq 0$, et si $x'Ax = 0 \Rightarrow x = 0$,

positive, ou *semi-définie-positive*, si, $\forall x \in \mathbb{R}^p, x'Ax \geq 0$,

orthogonale si $AA' = A'A = I$ ($A' = A^{-1}$).



Espaces et sous-espaces euclidiens

E est un espace vectoriel réel de dimension p isomorphe à $\mathbb{R}^p$.

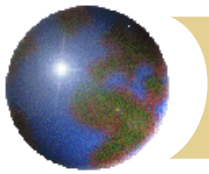
- Un sous-ensemble E_q de E est un *sous-espace vectoriel* (s.e.v.) de E s'il est non vide et stable :

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E_q^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \in E_q.$$

- Le q -uplet $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_q\}$ de E constitue un système *linéairement indépendant* si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i \mathbf{x}_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_q = 0.$$

- Un système linéairement indépendant $\mathcal{E}_q = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$ qui engendre dans E un s.e.v. $E_q = \text{vec}\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$ en constitue une *base* et $\dim(E_q) = \text{card}(\mathcal{E}_q) = q$.



Rang d'une matrice

A est la matrice d'une application linéaire de $E = \mathbb{R}^p$ dans $F = \mathbb{R}^n$.

$\text{Im}(A) = \text{vect}\{a^1, \dots, a^p\}$ est le s.e.v. de F *image* de A ;

$\text{Ker}(A) = \{x \in E ; Ax = 0\}$ est le s.e.v. de E *noyau* de A ;

$E = \text{Im}(A) \oplus \text{Ker}(A)$ si A est carrée associée à un endomorphisme de E

et $p = \dim(\text{Im}(A)) + \dim(\text{Ker}(A))$.

$\text{rang}(A) = \dim(\text{Im}(A))$,

$0 \leq \text{rang}(A) \leq \min(n, p)$,

$\text{rang}(A) = \text{rang}(A')$,

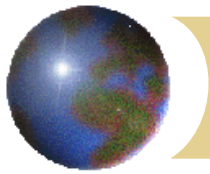
$\text{rang}(A + B) \leq \text{rang}(A) + \text{rang}(B)$,

$\text{rang}(AB) \leq \min(\text{rang}(A), \text{rang}(B))$,

$\text{rang}(BAC) = \text{rang}(A)$, si B et C sont régulières,

$\text{rang}(A) = \text{rang}(AA') = \text{rang}(A'A)$.

Enfin, si B ($p \times q$) est de rang q ($q < p$) et A est carrée ($p \times p$) de rang p , alors la matrice $B'AB$ est de rang q .



Métrique euclidienne

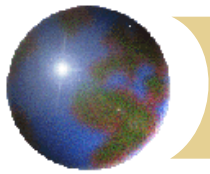
Soit M une matrice carrée ($p \times p$), symétrique, définie-positive ; M définit sur l'espace E :

- un *produit scalaire* : $\langle x, y \rangle_M = x' M y$,
- une *norme* : $\|x\|_M = \langle x, x \rangle_M^{1/2}$,
- une *distance* : $d_M(x, y) = \|x - y\|_M$,
- des *angles* : $\cos \theta_M(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle_M}{\|x\|_M \|y\|_M}$.

La matrice M étant donnée, on dit que :

- une matrice A est *M-symétrique* si $(MA)' = MA$,
- deux vecteurs x et y sont *M-orthogonaux* si $\langle x, y \rangle_M = 0$,
- un vecteur x est *M-normé* si $\|x\|_M = 1$,
- une base $\mathcal{E}_q = \{e_1, \dots, e_q\}$ est *M-orthonormée* si

$$\forall (i, j), \langle e_i, e_j \rangle_M = \delta_i^j.$$

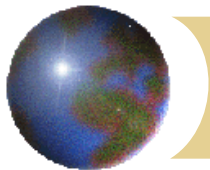


Projection

Soit W un sous-espace de E et $\mathcal{B} = \{b^1, \dots, b^q\}$ une base de W ; $P(p \times p)$ est une matrice de projection M -orthogonale sur W si et seulement si :

$$\forall y \in E, Py \in W \text{ et } \langle Py, y - Py \rangle_M = 0.$$

Toute matrice idempotente ($P^2 = P$) et M -symétrique ($P'M = MP$) est une matrice de projection M -orthogonale et réciproquement.



Propriétés des projections

- Les valeurs propres de P sont 0 ou 1

$$\begin{array}{ll} \mathbf{u} \in W, & P\mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad \lambda = 1, \text{ de multiplicité } \dim(W), \\ \mathbf{v} \perp W, \text{ (on note } \mathbf{v} \in W^\perp) & P\mathbf{v} = 0, \quad \lambda = 0, \text{ de multiplicité } \dim(W^\perp) \end{array}$$

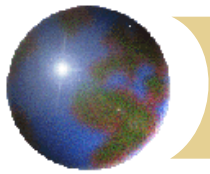
- $\text{tr}P = \dim(W)$.
- $P = B(B'MB)^{-1}B'M$, où $B = [b^1, \dots, b^q]$.
- Dans le cas particulier où les b^j sont M -orthonormés :

$$P = BB'M = \sum_{i=1}^q b^i b^{i'} M.$$

- Dans le cas particulier où $q = 1$ alors :

$$P = \frac{bb'}{b'Mb} M = \frac{1}{\|b\|_M} bb' M.$$

- Si $P_1, \dots, P_q$ sont des matrices de projection M -orthogonales alors la somme $P_1 + \dots + P_q$ est une matrice de projection M -orthogonale si et seulement si : $P_k P_j = \delta_k^j P_j$.
- La matrice $I - P$ est la matrice de projection M -orthogonale sur $W^\perp$.



Éléments propres des matrices

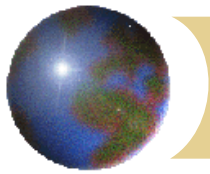
Définitions

- Par définition, un vecteur v définit une *direction propre* associée à une *valeur propre* λ si l'on a :

$$Av = \lambda v.$$

- Si λ est une valeur propre de A , le noyau $\text{Ker}(A - \lambda I)$ est un s.e.v. de E , appelé sous-espace propre, dont la dimension est majoré par l'ordre de multiplicité de λ . Comme cas particulier, $\text{Ker}(A)$ est le sous-espace propre associé, si elle existe, à la valeur propre nulle.
- Les valeurs propres d'une matrice A sont les racines, avec leur multiplicité, du *polynôme caractéristique* :

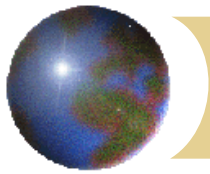
$$|A - \lambda I| = 0.$$



Éléments propres des matrices

Théorème 1

THÉORÈME 1. — Soit deux matrices $A(n \times p)$ et $B(p \times n)$; les valeurs propres non nulles de AB et BA sont identiques avec le même degré de multiplicité. Si u est vecteur propre de BA associé à la valeur propre λ différente de zéro, alors $v = Au$ est vecteur propre de la matrice AB associé à la même valeur propre.



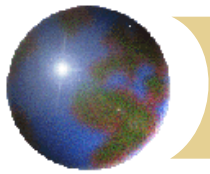
Éléments propres des matrices

Théorème 2

THÉORÈME 2 — *Une matrice $\mathbf{A}$ réelle symétrique admet p valeurs propres réelles. Ses vecteurs propres peuvent être choisis pour constituer une base orthonormée de E ; $\mathbf{A}$ se décompose en :*

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}' = \sum_{k=1}^p \lambda_k \mathbf{v}^k \mathbf{v}^{k'}$$

où $\mathbf{V}$ est une matrice orthogonale $[\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^p]$ des vecteurs propres orthonormés associés aux valeurs propres λ_k , rangées par ordre décroissant dans la matrice diagonale $\mathbf{\Lambda}$.



Éléments propres des matrices

Théorème 3

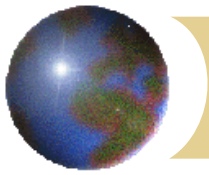
THÉORÈME 3. — *Une matrice A réelle M -symétrique admet p valeurs propres réelles. Ses vecteurs propres peuvent être choisis pour constituer une base M -orthonormée de E ; A se décompose en :*

$$A = V \Lambda V' M = \sum_{k=1}^p \lambda_k \mathbf{v}^k \mathbf{v}^{k'} M$$

où $V = [\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^p]$ est une matrice M -orthogonale ($V' M V = I_p$ et $V V' = M^{-1}$) des vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_k , rangées par ordre décroissant dans la matrice diagonale Λ .

Par définition, si A est positive, on note la racine carrée de A :

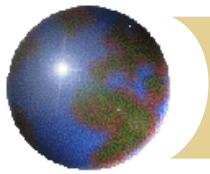
$$A^{1/2} = \sum_{k=1}^p \sqrt{\lambda_k} \mathbf{v}^k \mathbf{v}^{k'} M = V \Lambda^{1/2} V' M.$$



Eléments propres des matrices

Propriétés

Si $\lambda_k \neq \lambda_j$,	$\mathbf{v}^k \perp_{\mathbf{M}} \mathbf{v}^j$;
$\text{tr} \mathbf{A} = \sum_{k=1}^p \lambda_k$;	$ \mathbf{A} = \prod_{k=1}^p \lambda_k$;
si $\mathbf{A}$ est régulière,	$\forall k, \lambda_k \neq 0$;
si $\mathbf{A}$ est positive,	$\lambda_p \geq 0$;
si $\mathbf{A}$ est définie-positive,	$\lambda_p > 0$;



Décomposition en Valeurs Singulières

Il s'agit, cette fois, de construire la décomposition d'une matrice $\mathbf{X}(n \times p)$ rectangulaire relativement à deux matrices symétriques et positives $\mathbf{D}(n \times n)$ et $\mathbf{M}(p \times p)$.

THÉORÈME 4 — *Une matrice $\mathbf{X}(n \times p)$ de rang r peut s'écrire :*

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{V}' = \sum_{k=1}^r \sqrt{\lambda_k} \mathbf{u}^k \mathbf{v}^{k'}; \quad (3)$$

$\mathbf{U}(n \times r)$ contient les vecteurs propres $\mathbf{D}$ -orthonormés ($\mathbf{U}'\mathbf{D}\mathbf{U} = \mathbf{I}_r$) de la matrice $\mathbf{D}$ -symétrique positive $\mathbf{X}\mathbf{M}\mathbf{X}'\mathbf{D}$ associés aux r valeurs propres non nulles λ_k rangées par ordre décroissant dans la matrice diagonale $\mathbf{\Lambda}(r \times r)$; $\mathbf{V}(p \times r)$ contient les vecteurs propres $\mathbf{M}$ -orthonormés ($\mathbf{V}'\mathbf{M}\mathbf{V} = \mathbf{I}_r$) de la matrice $\mathbf{M}$ -symétrique positive $\mathbf{X}'\mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{M}$ associés aux mêmes valeurs propres. De plus,

$$\mathbf{U} = \mathbf{X}\mathbf{M}\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{-1/2} \text{ et } \mathbf{V} = \mathbf{X}'\mathbf{D}\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{-1/2}.$$