

Chapitre 5

L'ordonnancement de projet

I Introduction

Dns ce chapitre, on s'intéresse à l'ordonnancement de projet qui est une partie prenante dans **la gestion de projet**.

La modélisation des problèmes d'ordonnancement de projet nécessite la connaissance des concepts de base de la théorie des graphes.

Pour présenter les concepts et méthodes de l'ordonnancement de projet, il est bien utile de définir **le problème central**, où on ne tient pas compte des contraintes de ressources, c'est-à-dire on considère que les ressources sont à quantité illimitée. L'étude de ce cas permet d'analyser l'enchaînement des tâches au cours du temps et introduire les méthodes de résolution qui seront utilisées dans l'étude des problèmes d'ordonnancement en tenant compte des contraintes de ressources.

II La gestion de projet

La gestion de projet est l'utilisation d'un savoir, d'habiletés, d'outils et de techniques dans le cadre des activités d'un projet, en vue de satisfaire ou de dépasser les exigences et les attentes des parties prenantes à l'égard d'un projet [DP 01].

Le gestionnaire de projet, parfois appelé coordonnateur ou chef de projet, en administre les détails, au jour le jour. Il s'agit là d'un défi constant qui demande une compréhension du contexte plus général du projet et la capacité de concilier des exigences contradictoires telles que :

- les **ressources** disponibles et les attentes;
- les priorités différentes des parties prenantes;
- les besoins définis et à la portée du projet;
- la qualité et la quantité.

III Le Projet

Un projet est défini comme une démarche spécifique permet de structurer méthodiquement et progressivement une réalité à venir [GIA 91].

Selon [LIZ 2005], un projet est un effort complexe pour atteindre un objectif spécifique de qualité, devant respecter un échéancier et un budget. Un projet est défini et mis en œuvre pour élaborer une réponse au besoin d'un utilisateur, d'un client ou d'une clientèle et il implique un objectif et des actions à entreprendre avec des ressources données. Il est réalisé une seule fois, doté d'un début et d'une fin déterminée et qui vise à créer un produit ou un savoir unique. Il peut nécessiter la participation d'une seule ou de milliers de personnes. Sa durée peut être de quelques jours ou de plusieurs années. Il peut être entrepris par une seule organisation ou par un groupe d'organismes intéressés. Il peut s'agir de quelque chose d'aussi simple que l'organisation d'un événement d'une journée ou d'aussi complexe que la construction d'un barrage sur une rivière.

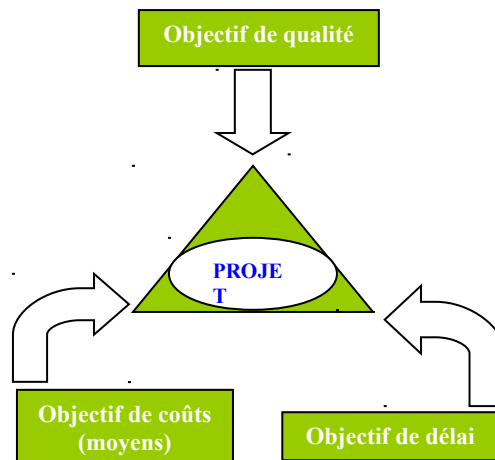


Figure 1. Les objectifs du projet.

III.1 Cycle de vie d'un projet

Un projet a également un cycle de vie précis : il débute, se réalise puis se termine. Les différentes phases du cycle de vie d'un projet sont :

1. Lancement
- 2. Planification**
3. Exécution
4. Suivi
5. Clôture

La figure suivante (Figure III.2) illustre le déroulement du processus de gestion d'un projet.

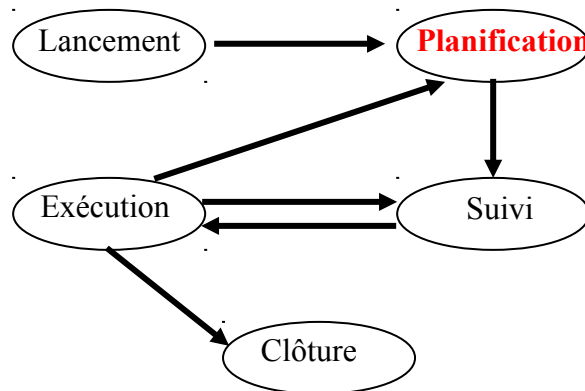


Figure 2. Cycle de vie d'un projet.

L'ordonnancement se trouve dans la phase planification

III.2 Les éléments d'un projet

- Les tâches
- Les ressources
- Les contraintes
- La fonction 'objectif'

- Etablir la liste des tâches

Au départ, il faut dresser la liste exhaustive des tâches à exécuter. Elle peut aller d'une dizaine à quelques centaines de tâches. Les projets importants comportent parfois plusieurs milliers de tâches.

- Codifier les tâches

Pour passer à l'étape d'examen des contraintes, il est nécessaire de repérer, de codifier les tâches. Ceci va faciliter la construction du réseau.

Au début du projet, il est recommandé d'avoir recours à des codes simples. En réalité aucune règle ne peut être édictée, mais une codification faisant apparaître domaine et nature de la tâche est très appropriée. Dans ce qui suit on utilise les caractères A, B, C, etc., ou 1, 2, 3, etc. pour codifier les tâches.

- Quel est le bon nombre de tâches à définir ?

Ce nombre est fonction de l'ampleur du projet, mais avec un même nombre d'activités, on peut planifier:

- la construction d'une usine (4 à 5 années) ou changer les outils d'une machine (4 à 5 heures).
- la préparation sur 30 ans de sa retraite ou l'assemblage automatique de quelques composants en 30 secondes.

Diviser beaucoup conduit à obtenir un scénario détaillé et à repérer toutes les contraintes, mais rend difficile le tracé du graphe correspondant et le suivi de l'enchaînement par la suite. On divise peu, cela produit les effets inverses. Il faut chercher alors, un équilibre entre ces deux problèmes.

- Exemple de réalisation d'une maison:

Code	Désignations des tâches	Durées (unité de temps)	Antériorités Immédiates
A	Etablissement des plans	4	-
B	Terrassement	5	-
C	Creuser les fonds de piliers	6	-
D	Faire les fonds de piliers	3	A, B, C
E	Placement arrivée et évacuation assainissement	7	A, B, C
F	Dalle	5	A, B, C
G	Cloisonnage	8	D, E
H	Carrelage	6	D, E
I	Plomberie	5	F
J	Installation chauffage	3	F
K	Electricité	5	G, H, I, J
L	Pose faïence	2	G, H, I, J
M	Boiserie	1	K, L
N	Peinture	4	K, L

Tableau 1. Une table d'ordonnancement

III.3 L'ordonnancement dans la gestion de projet

L'ordonnancement se situe exactement dans la phase planification. Il réalise le suivi opérationnel du projet : gestion de ressources, suivi de l'avancement, lancement des activités. Techniquement, ordonnancer un projet consiste à programmer dans le temps l'exécution des tâches, tout en respectant les contraintes et de manière à optimiser les critères de performance retenus. C'est plus particulièrement à ce stade qu'interviennent les techniques d'ordonnancement de projet présentées dans ce qui suit.

IV Le problème central de l'ordonnancement

Pour le problème central de l'ordonnancement, il s'agit d'ordonnancer en une durée minimale un ensemble $I = \{1, 2, \dots, n\}$ de tâches soumises à des contraintes de précédence appelées contraintes potentielles.

Donc, dans le problème central de l'ordonnancement, on ne tient compte que des contraintes de potentiels qui sont d'antériorité et de durée. Les autres contraintes sont ignorées. Les ressources sont supposées à quantité illimitée.

IV.1 Modélisation du problème central

Il existe actuellement trois méthodes de modélisation du problème central : *le diagramme de Gantt*, *la méthode des potentiels* (AoN) et *la méthode PERT/CPM ou (AoA)*. Ces deux dernières utilisent comme outil de modélisation la théorie des graphes ; et plus particulièrement le réseau.

On note que dans la table initiale des données, les tâches A et B n'ont aucune antériorité (les tirets de la dernière colonne) et que les tâches I et J n'ont aucune postériorité (I et J n'apparaissent pas en dernière colonne).

Pour les besoins algorithmiques, on complète cette table par une tâche α (appelée source ou racine) de durée 0 précédant A et B et une tâche ω (appelée puits ou anti-racine) de durée 0 succédant à I et J. On déduit la deuxième table.

Nous définissons alors *un graphe conjonctif* $G = (X, U)$, qui est valué ayant une racine α et un puits ω tel qu'il existe un chemin de valeur positive entre α et tous les autres sommets, et un chemin de valeur positive entre tout sommet différent du puits ω et ω .

Une condition nécessaire et suffisante pour appliquer l'une des méthodes de modélisation des problèmes d'ordonnancement sur un graphe conjonctif est que ce graphe n'ait pas de *circuit* et les valeurs sur les arcs (les t_i) sont de valeurs positives ou nulles. De part la nature du problème, une tâche ne peut se succéder à elle-même, donc le graphe ne contient pas de boucles.

IV.1.1 Le diagramme de Gantt

Au début du siècle dernier, le gouvernement américain déclara la guerre à l'Allemagne, Gantt développa alors, une représentation graphique de déroulement des projets, qui prit plus tard le nom de diagramme de Gantt du nom de son inventeur.

Donc, pour faire le planning de l'exécution du projet et pour en contrôler le déroulement on utilise le diagramme à barres (Bar Chart) ou diagramme de Gantt.

Chaque tâche est symbolisée par un rectangle dans lequel sont inscrits le code et la durée de la tâche. Commenant par représenter les tâches avec antériorité α , une tâche est portée dans le diagramme lorsque toutes ses antériorités y sont déjà portées. Ceci est toujours possible, car une tâche ne se succède pas à elle-même, les rectangles sont ainsi toujours placés à droite (c'est le même principe que celui des niveaux d'un graphe sans circuit). Cette représentation indique bien le déroulement des travaux mais moins bien les antériorités.

On introduit cette technique à l'aide d'un exemple du problème de réalisation d'une construction tiré de [BEN 01] :

Code	Désignations tâches	Durées	Antériorités Immédiates	Code	Durées	Antériorités Immédiates
A	Etablissement des plans	4	-	A	4	-
B	Terrassement	5	-	B	5	-
C	Creuser les fonds de piliers	6	-	C	6	-
D	Faire les fonds de piliers	3	A, B, C	D	3	A, B, C
E	Placement arrivée et évacuation assainissement	7	A,B, C	E	7	A,B, C
F	Dalle	5	A,B, C	F	5	A,B, C
G	Cloisonnage	8	D,E	G	8	D,E
H	Carrelage	6	D,E	H	6	D,E
I	Plomberie	5	G, F	I	5	G, F
J	Installation chauffage	3	G, F	J	3	G, F
K	Electricité	5	G, H, I, J	K	5	G, H, I, J
L	Pose faïence	2	G, H, I, J	L	2	G, H, I, J
M	Boiserie	1	K, L	M	1	K, L
N	Peinture	4	K, L	N	4	K, L

Tableau 2. Table initiale d'ordonnancement T. Pour le planificateur la colonne "Désignation" n'est pas importante

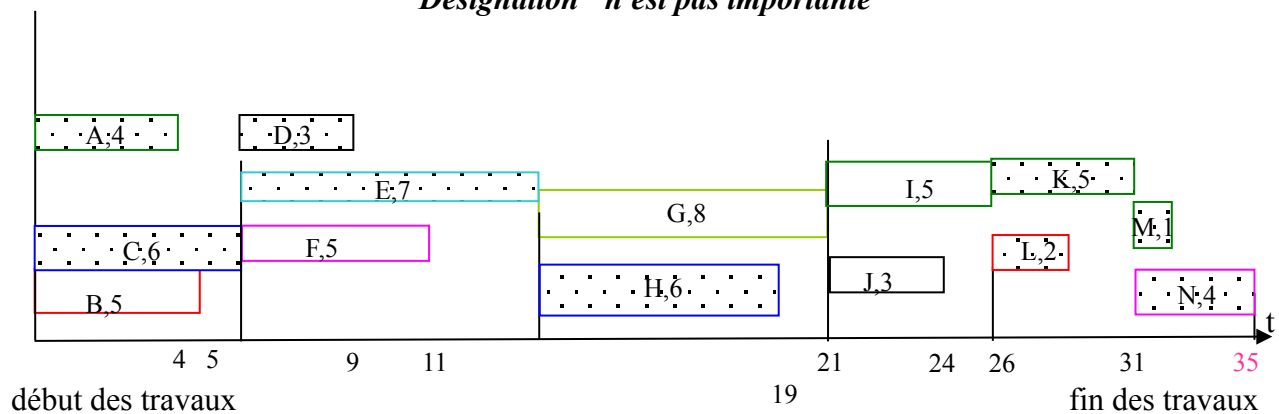


Figure 3. Le diagramme de Gantt de la table III.1.

La durée totale du projet = 35 unité de temps.

Il existe actuellement d'autres formes du diagramme de Gantt utilisant les sous forme de tableau, mais le principe reste toujours celui qu'on a présenté.

Jusqu'à l'année 1958 on utilisait le diagramme de Gantt pour traiter les problèmes d'ordonnancement. Cette année là, se sont développées en parallèle deux méthodes fondées sur la théorie des graphes pour ordonnancer les travaux. La méthode des potentiels de Bernard ROY appelée méthode française, et la méthode PERT/CPM appelée méthode américaine.

Algorithmiquement, les deux méthodes sont équivalentes. Elles se distinguent seulement par la manière d'écrire le graphe de réseau. Nous les présenterons dans ce qui suit.

IV.1.2 Le graphe des potentiels (AoN: Activities on Nodes)

La méthode des potentiels a été développée vers la fin des années 50 parallèlement à la méthode PERT. Elle est appelée également la méthode MPM (méthode des potentiels Metra) ou encore méthode des potentiels –tâches.

Les tâches sont symbolisées par des sommets auxquels on donne le même code, 2 sommets u et v sont reliés par un arc de u vers v si et seulement si la tâche u précède la tâche v .

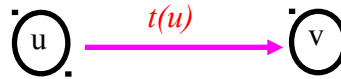


Figure 4. La tâche u , de durée $t(u)$, précède la tâche v

On porte en suite sur chaque arc incident extérieurement à un sommet u la durée de la tâche u correspondante de sorte que les valeurs sur les arcs de même extrémité initiale soient égales. Nous verrons cependant plus loin que ces valeurs vont différer en rajoutant des contraintes sur les tâches autres que les antécédents.

Un chemin, α , $A_1, A_2, \dots, A_k, A$ du graphe de α à une tâche A correspond alors à une suite de tâche $A_1, A_2, \dots, A_k$, précède A_{i+1} , $i=1, \dots, k-1$, et A_k précède A . La durée d'un tel chemin est la somme des durées des tâches qui le composent. Le dessin du graphe est très simple puisqu'il suffit de disposer les sommets aléatoirement et de les relier par les arcs. Le graphe étant sans circuit et sans boucle (une tâche ne se succède pas à elle-même).

La réorganisation des sommets en niveaux montre clairement les antécédents. Elle se fait comme suit :

- 0 **niveau I** : la tâche source α sans antécédent ;
- ▮ **niveau II** : tâches n'ayant que le prédécesseur α ;
- └ **niveau III** : tâches n'ayant que les prédécesseurs du niveau II ;
- ┘ **niveau IV** : tâches n'ayant que les prédécesseurs du niveau III ;
- ≡ etc.
- le dernier niveau est ω qui n'a aucun successeur.

Considérons l'exemple simple suivant:

Codes	Durées	Précédence
A	4	-
B	6	A, C
C	5	-
D	3	A, C

Tableau 3. (a)

1- Ajouter à la table α et ω .

Codes	Durées	Précédence
α	0	-
A	4	α
B	6	A, C
C	5	α
D	3	A, C
ω	0	B, D

Tableau 3. (b)

2- Organiser la table en niveaux:

N_0 : α , N_1 : A, C N_2 : B, D N_3 : ω

3- Dessiner le graphe selon la nouvelle table:

Codes	Durées	Précédence
α	0	-
A	4	α
C	5	α
B	6	A, C
D	3	A, C
ω	0	B, D

Tableau 3. (c)

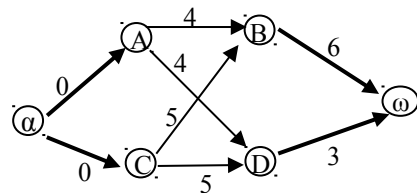


Figure5. Le graphe des potentiels AoN de la table ci-contre.

Considérons un deuxième exemple, soit la table d'ordonnancement suivante:

Codes	Durées	Antériorités
α	0	-
A	4	α
B	7	A, B, C
C	6	α
D	3	A, B, C
E	5	α
F	5	G, H, I, J
G	8	D, E
H	1	K, L
I	5	F
J	4	K, L
K	5	A, B, C
L	2	G, H, I, J
M	1	D, E
N	4	F
ω	0	M, N

N_0 : α
 N_1 : A, C, E
 N_2 : B, D, K
 N_3 : G, I, M, N
 N_4 : F, L
 N_5 : H, J
 N_6 : ω

Après avoir chercher les niveaux, la nouvelle table est la suivante:

Codes	Durées	Précédence
α	0	-
A	4	α
E	5	α
C	6	α
D	3	A, B, C
B	7	A,B, C
K	5	A,B, C
G	8	D,E
M	6	D,E
I	5	F
N	3	F
F	5	G, H, I, J
L	2	G, H, I, J
H	1	K, L
J	4	K, L
ω	0	M, N

Tableau 4. La table initiale d'ordonnancement T pour les traitements algorithmiques, désignations non reprises.

Le tableau initial des données n'est autre que la matrice des prédécesseurs d'un graphe valué n'admettant qu'une source α et un puits ω .

Le graphe des potentiels (AoN) n'est que le dessin de la nouvelle tabe.

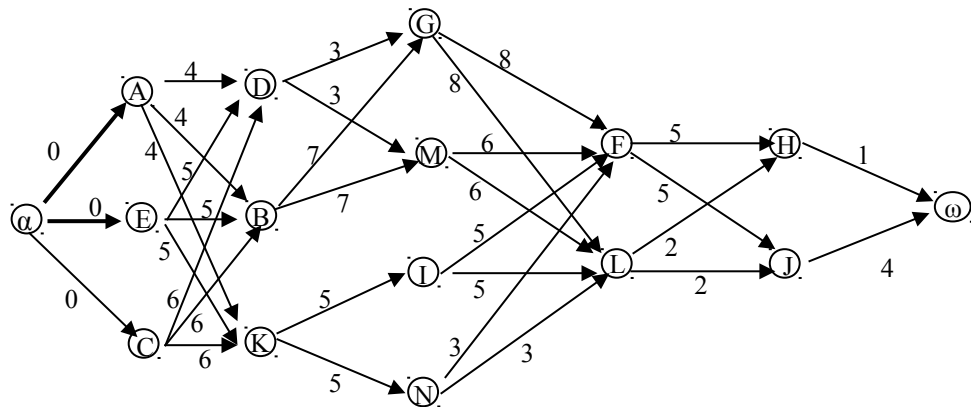


Figure 6. Le graphe des potentiels avec les sommets réorganisés en niveaux.

V. Résolution du problème central

[PAR 05] propose une démarche en deux phases qu'il les a nommé propagation avant et propagation arrière :

- 0 Propagation avant : Cette première phase permet de déterminer les dates de début au plus tôt des tâches en parcourant le réseau dans le sens des contraintes de précédence. A partir de la date de début au plus tôt de la première tâche du graphe, un algorithme de plus long chemin entre cette tâche et toutes les autres est appliqué afin de déterminer la date la date de début au plus tôt de toutes les tâches. La différence entre la date de fin de la dernière tâche et la date de début de la première permet de déterminer la durée minimale du projet.
- 1 Propagation arrière : Cette seconde phase permet de déterminer la date de début ou de fin au plus tard des tâches. L'objectif est de minimiser la durée du projet. La date de fin au plus tard de la dernière tâche est donc posée égale à sa date de fin au plus tôt. Comme lors de la première phase , le chemin le plus long entre la dernière tâche et chacune des autres permet d'obtenir la date de fin au plus tard de chacune des tâches.

On détermine ainsi le (les) chemin (s) critique (s) correspondant à une suite de tâches dont les dates de début au plus tôt et au plus tard sont égales.

V.1 Dates associées à une tâche

a) Date de début au plus tôt :

La date de début au plus tôt d'une tâche A do_A est la date minimum à laquelle peut commencer. C'est donc la date avant laquelle un événement ne peut se réaliser.

b) Date de début au plus tard

La date de début au plus tard d'une tâche A da_A est la date limite de sa réalisation. Après quoi le projet sera retardé.

c) Date de fin au plus tôt

La date de fin au plus tôt d'une tâche A fo_A est la date à laquelle A se termine en commençant à sa date de début au plus tôt.

d) Date de fin au plus tard

La date de fin au plus tard d'une tâche A fa_A est la date minimum des dates de fin au plus tard des tâches qui lui succèdent. Elle est la date à laquelle A se termine si elle commence à sa date de début au plus tard.

V.2 Calcul des dates

Une tâche ne peut démarrer que lorsque les tâches de tous les chemins de α à A sont exécutées, en particulier celles du plus long chemin de α à A dont la longueur est la date minimum de début d'exécution de A, c'est-à-dire la date de début au plus tôt do_A .

L'exécution d'un projet ne se termine donc que lorsque toutes ses tâches sont exécutées, en particulier celles de plus long chemin de α à ω .

Les dates de début au plus tôt des tâches d'un problème d'ordonnancement sont donc déterminées à partir de l'arborescence des plus longs chemins du graphe des potentiels préparé ou du graphe PERT.

Les graphes étant sans circuits, nous appliquerons l'algorithme de Bellemann pour déterminer les dates de début au plus tôt. Les durées sur les arcs de même extrémité initiale étant égales dans le graphe des potentiels préparé, on vérifie que les tâches ayant les mêmes antécédents ont les mêmes dates de début au plus tôt.

Pour calculer la date de début au plus tôt de la tâche A do_A on procède comme suit :

- La date de début au plus tôt de la tâche α est initialisée à 0
- pour les autres tâches :

- soit il y a un seul arc entre A et B

alors : $do_B = do_A + t_A$

- soit il y a k arcs ($k \geq 2$) alors :

$$do_B = \max (do_{A1} + t_{A1}, \dots, do_{Ak} + t_{Ak})$$

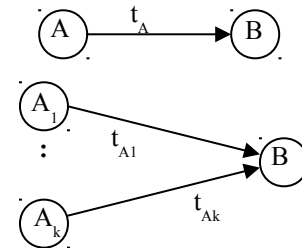


Figure 7. Calcul de do_B dans le cas d'un ou plusieurs arcs.

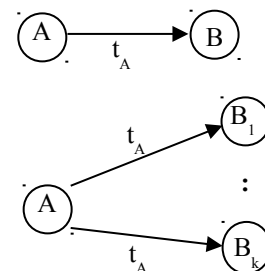
Pour la date de début au plus tard de la tâche A da_A , la technique est la suivante :

- La date de début au plus tard de la tâche ω est initialisée à sa date de début au plus tôt c.à.d. $da_\omega = do_\omega$

- Pour les autres tâches :

- soit il y a un seul arc entre A et B

alors : $da_A = da_B - t_A$



- soit il y a plusieurs arcs qui sortent de A alors :

$$da_A = \min (da_{B1}, ..., da_{Bk}) - t_A$$

Pour le calcul de la date de fin au plus tôt de la tâche A notée fo_A , elle s'obtient aisément en ajoutant la durée de la tâche A à sa date de début au plus tôt :

$$fo_A = do_A + d_A$$

La date de fin au plus tard de la tâche A fa_A s'obtient en ajoutant sa durée à sa date de début au plus tard : $fa_A = da_A + t_A$

V.3 Le chemin critique

Le chemin critique dans le graphe des potentiels ou PERT est le plus long chemin de α à ω . Sa valeur do_ω est la durée minimale du projet.

On appellera sous-chemin tout sous-chemin critique. Si $A_1, A_2, ..., A_k$ sont les postérieures de A, on sait que : $fa_A = da_A + t_A \leq da_{Ai}$, $i = 1, ..., k$ et $da_A = \min_{i=1, ..., k} da_{Ai} - t_A$

Le projet n'ayant pas d'intérêt à être retardé, la fin des travaux ω doit impérativement avoir lieu à la date $da_\omega = do_\omega$. Plus généralement, toute tâche A du chemin critique P est telle que :

$$da_A = do_A$$

Exemple 1:

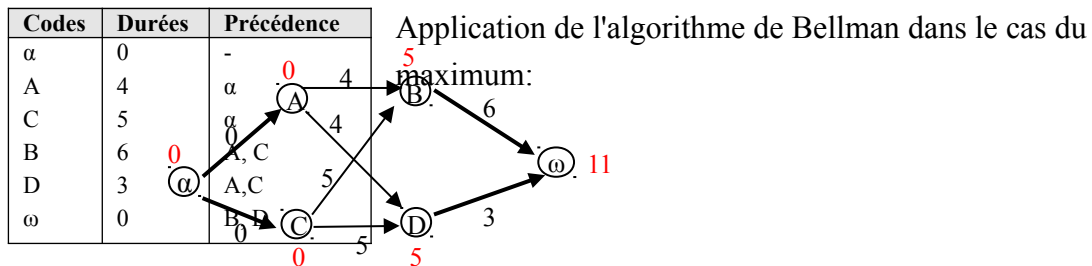


Figure 9. Calcul des dates au plus tôt

- Mettre $da_\omega = do_\omega$
- Considérer ω comme source
- Application de l'algorithme de Bellman dans le cas du minimum en sens inverse:

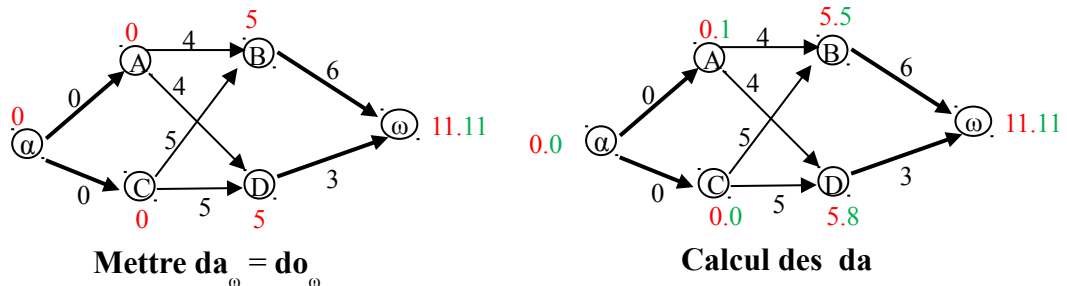


Figure 10. Calcul des dates.

Le chemin critique : toutes les tâches qui ont $do = da$

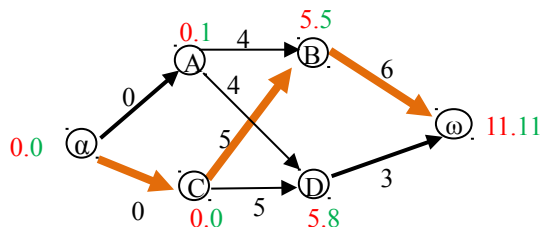


Figure 11. Recherche du chemin critique

Résultats:

- La durée totale du projet = 11 unités de temps
- Le chemin critique: $\{ \alpha, C, B, \omega \}$

On peut retarder la tâche A (qui n'est pas critique) de : $da_A - do_A = 1 - 0 = 1$ unités de temps
 On peut retarder la tâche D (qui n'est pas critique) de : $da_D - do_D = 8 - 5 = 3$ unités de temps

Exemple 2:

Code	Durée	Antériorités
α	0	-
A	5	α
B	7	α
C	8	α
D	17	α
E	11	A,B,C
F	9	A,B,C
G	12	D,E
H	13	D,E
I	8	D,E
J	10	F
K	11	G,H
ω	0	G,H
		I,J,K

Tableau 5. Une table

d'ordonnancement T.

(a) Calcul des dates de début au plus tôt
Le calcul se fait dans l'ordre croissant des niveaux et les sommets d'un même niveau dans un ordre quelconque.
$do_{\alpha} = 0$ $do_A = do_{\alpha} + 0 = 0$ $do_B = do_{\alpha} + 0 = 0$ $do_C = do_{\alpha} + 0 = 0$ $do_D = \text{Max}[do_A + 5, do_B + 7, do_C + 8] = 8$ $do_E = \text{Max}[do_A + 5, do_B + 7, do_C + 8] = 8$ $do_F = \text{Max}[do_D + 17, do_E + 11] = 25$ $do_G = \text{Max}[do_D + 17, do_E + 11] = 25$ $do_H = \text{Max}[do_D + 17, do_E + 11] = 25$ $do_I = 24 + 9 = 34$ $do_J = \text{Max}[do_G + 12, do_H + 13] = 38$ $do_K = \text{Max}[do_G + 12, do_H + 13] = 38$ $do_{\omega} = \text{Max}[do_I + 8, do_J + 10, do_K + 11] = 50$

(b) Calcul des dates de début au plus tard
Le calcul se fait dans l'ordre décroissant des niveaux et les sommets d'un même niveau dans un ordre quelconque.
$da_{\omega} = do_{\omega} = 50$ $da_I = do_{\omega} - 8 = 42$ $da_J = do_{\omega} - 10 = 40$ $da_K = do_{\omega} - 11 = 39$ $da_F = da_I - 9 = 33$ $da_G = \text{Min}[da_J, da_K] - 12 = 26$ $da_H = \text{Min}[da_J, da_K] - 13 = 25$ $da_D = \text{Min}[da_F, da_G] - 17 = 8$ $da_E = \text{Min}[da_F, da_G] - 11 = 14$ $da_A = \text{Min}[da_D, da_E] - 5 = 3$ $da_B = \text{Min}[da_D, da_E] - 7 = 1$ $da_C = \text{Min}[da_D, da_E] - 0 = 0$ $da_{\alpha} = \text{Min}[da_A, da_B, da_C] - 0 = 0$

Tableau 6. (a) et (b) Dates de début au plus tôt et au plus tard du tableau de la figure III.4.

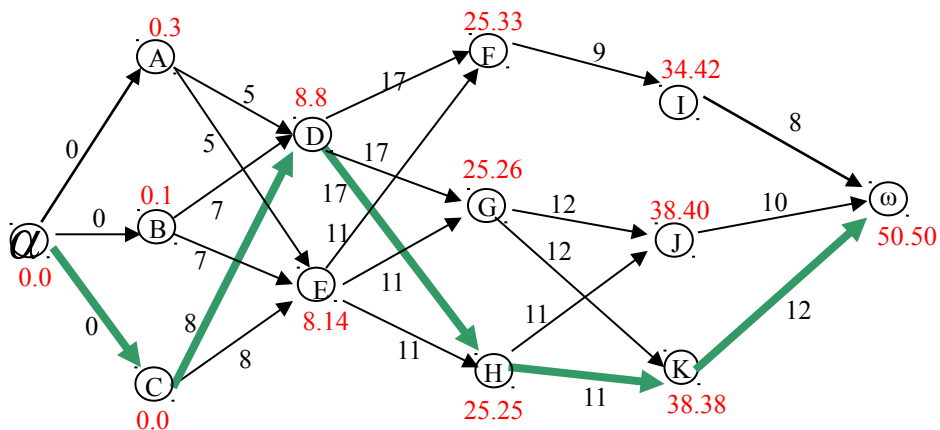


Figure 12. Les dates de début au plus tôt et au plus tard dans le graphe des potentiels.

La durée totale du projet = 50 unités de temps

Le chemin critique: $\{\alpha, C, D, H, K, \omega\}$

VI. Le graphe PERT (AoA: Activities on Arcs)

La méthode PERT (Program Evaluation and Review Technique – technique d’ordonnancement et de contrôle des programmes) a été mise au point par la marine américaine qui devait conduire à la réalisation des missiles à ogive nucléaire Polaris. Cette technique a permis de coordonner les travaux de près de 6000 constructeurs, 250 fournisseurs et 9000 sous-traitants dans un délai de réalisation de 7 ans.

L’utilisation de la méthode PERT a permis de ramener la durée globale du projet de 7 à 4 ans.

Dans le graphe PERT alors, appelé graphe potentiels-étapes, une tâche est représentée par un arc auquel on donne le même code, deux arcs u et v tels que $T(u) = I(v)$ si et seulement si la tâche u précède la tâche v . Les extrémités initiale et terminale d’un arc sont respectivement *les événements début de tâche et fin de tâche*, elles sont appelées étape. Les durées sont portées sur les arcs correspondants.

Dans la figure suivante :

- le graphe se construit de gauche à droite ;
- les points d’interrogation indiquent que les tâches antérieures à u et postérieures à v ne sont pas encore traitées.
- chaque flèche représente une tâche à effectuer ;
- les points représentent les étapes ;
- les tâches (arcs) qui partent d’un point (étape) ne peuvent commencer que lorsque les tâches qui arrivent au point sont tous terminées ;
- la longueur des flèches n’a aucun lien avec les durées inscrites sur l’arc.

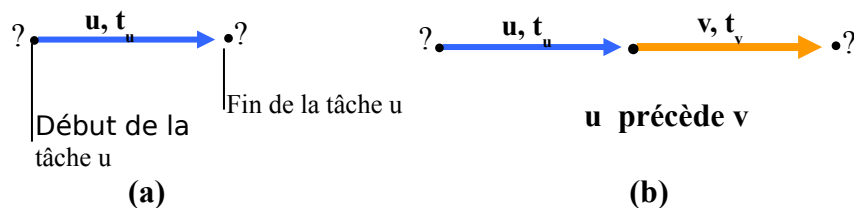
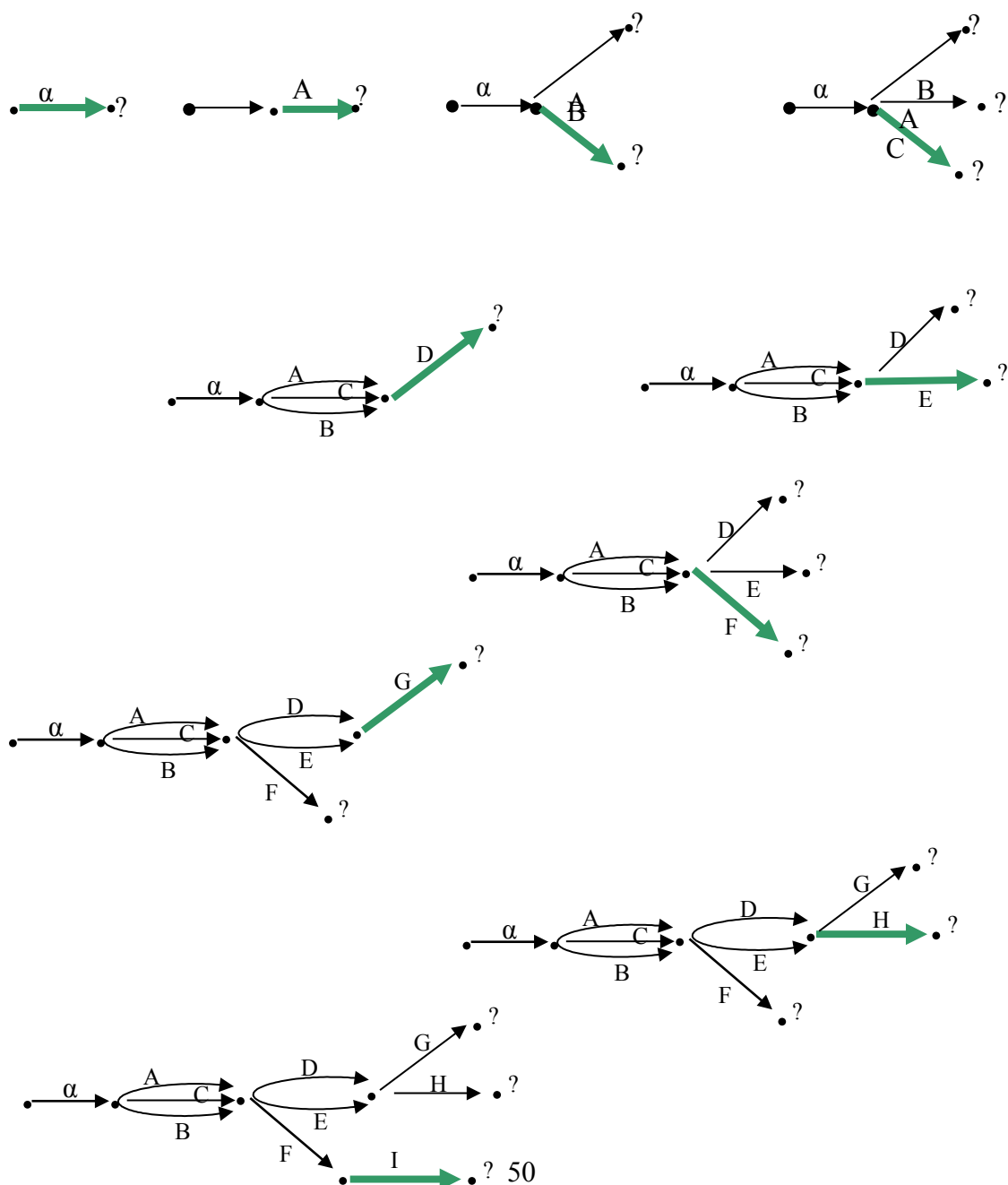


Figure 13. La tâche u précède la tâche v dans le graphe PERT.

VI.2 Dessin du graphe PERT

Généralement, le praticien trouve des difficultés à dessiner le graphe. La figure suivante (Figure III.8.) présente une technique nouvelle de construction du graphe PERT. Elle est plutôt pédagogique.

Notre méthode donne les étapes successives de la construction du graphe PERT : on prépare d'abord la table par un tri topologique vu précédemment, ensuite on balaye la table selon la colonne des codes et la tâche correspondant à la ligne de balayage en cours est rajoutée en tenant compte des antériorités. On verra dans le chapitre V une autre technique de construction du graphe PERT en utilisant les résultats sur les graphes adjoints. Pour illustrer cette technique, considérons l'ordonnancement du tableau III.2 :



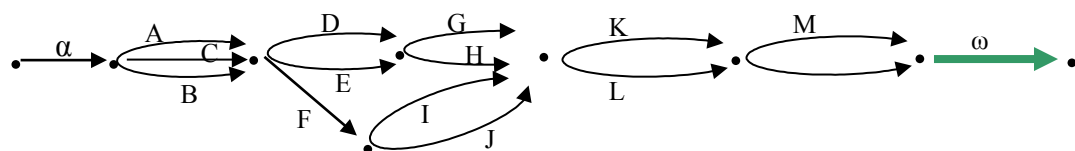


Figure 14. Le graphe PERT construit par ajout successif des tâches, les durées n'étant pas inscrites.

IV.2.1 Notion de tâche fictive

Si le graphe de la méthode des potentiels et celui de la méthode PERT sont très proches, ce n'est pas toujours le cas. La construction du graphe PERT pose des problèmes qui amènent à ajouter des arcs fictifs (virtuels ou artificiels) qui ne correspondent à aucune tâche.

Supposons maintenant que le problème d'ordonnancement comporte 4 tâches a, b, c et d telles que a précède c sans précéder d et b précède c et d.

Dans le graphe PERT, la représentation n'est pas possible sans une légère modification ; en effet, a et b précèdent c, les extrémités terminales de a et b devraient coïncider avec l'extrémité initiale de c. Or, l'extrémité initiale de d devrait coïncider aussi avec l'extrémité terminale de b donc de a mais a ne précède pas d. Ce problème est résolu par l'introduction d'une tâche fictive f de durée 0 dont le principe est de séparer les extrémités terminales de a et b en éclatant le sommet s, tout en gardant les contraintes de succession.

L'introduction de la tâche fictive modifie le tableau des antériorités lequel donne la correspondance dans le graphe des potentiels.

Code (s)	Anté.
c	a, b
d	b

Tableau 7. (a) Un sous-tableau des antériorités de c et d.

Code (s)	Anté.
c	a, f
d	b
f	b

Tableau 7. (b) Nouveau sous-tableau des antériorités c, d et f.

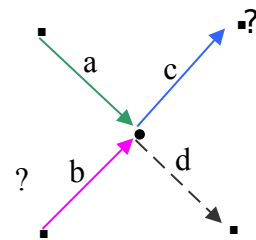


Figure 15. (a) Problème de représentation dans le graphe PERT.

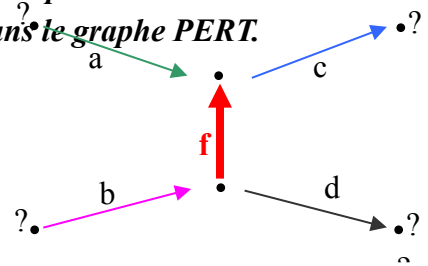


Figure 15. (b) Introduction de la tâche fictive f et représentation dans le graphe PERT.

L'introduction des tâches fictives permet de solutionner certaines situations et de lever des ambiguïtés. Elles ne mettent en jeu aucun moyen matériel ou financier. Considérons l'exemple de construction simplifié suivant (tiré de [FIN 02]):

Codes	Durées	Antér.
α	0	-
A	2	α
B	2	α
C	2	H
D	3	α
E	4	B, G
F	2	C, I
G	3	A, D
H	4	B, D
I	5	H
J	3	C
ω	0	E, J, F

Niveau	Sommet
Niveau I	α
Niveau II	A, B, D
Niveau III	G, H
Niveau IV	C, E, I
Niveau V	F, J
Niveau VI	ω

Tableau 8.(a) et (b) La table d'ordonnement T et l'organisation

Le dessin du graphe PERT se fait exactement comme l'exemple précédent :

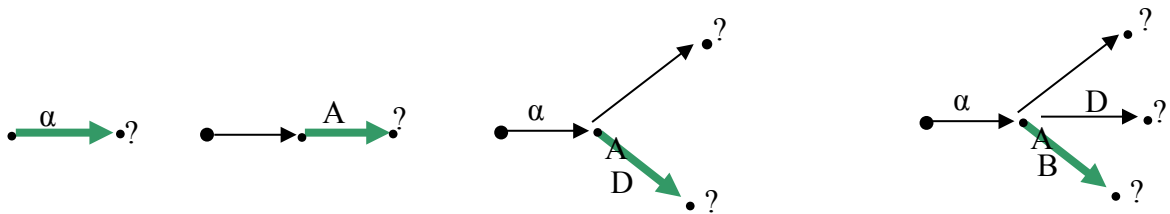


Figure 16. (a)

Pour dessiner la tâche G il faut que les arcs des tâches A et D coïncident dans leurs extrémités terminales, or la tâche D est antérieure à une autre tâche (H), d'où la création d'une tâche fictive f_1 (voir Figure III.10 (b)).

Le même scénario se répète avec la tâche H : il faut que les extrémités de D et B coïncident, or D est antérieure à G ; donc il faut créer une autre tâche fictive f_2 (voir figure III. 10 (c)).

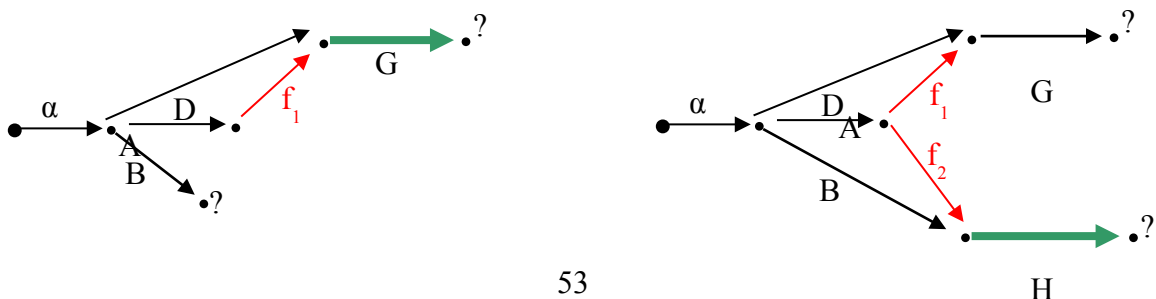


Figure 16. (b)

Figure 16. (c)

et nous continuons le même processus jusqu'à la dernière ligne de la table :

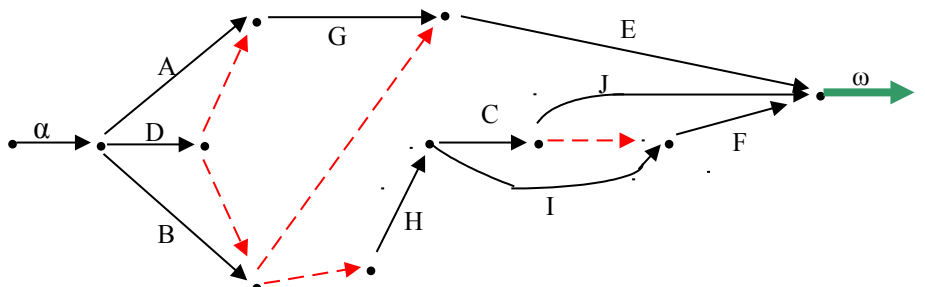


Figure 16. Le graphe PERT de la table III.4 avec un minimum de 5 tâches fictives.

V.3 Le chemin critique

Le chemin critique dans le graphe des potentiels ou PERT est le plus long chemin de α à ω . Sa valeur do_{ω} est la durée minimale du projet.

On appellera sous-chemin tout sous-chemin critique. Si $A_1, A_2, \dots, A_k$ sont les postérieures de A, on sait que : $fa_A = da_A + t_A \leq da_{A_i}, i = 1, \dots, k$ et $da_A = \min_{i=1, \dots, k} da_{A_i} - t_A$

Le projet n'ayant pas d'intérêt à être retardé, la fin des travaux ω doit impérativement avoir lieu à la date $da_{\omega} = do_{\omega}$. Plus généralement, toute tâche A du chemin critique P est telle que :

$$da_A = do_A$$

Prenons l'ordonnancement ci-contre (Tableau III.7)

et calculons les dates et les marges :

Code	Durée	Antériorités
α	0	-
A	5	α
B	7	α
C	8	α
D	17	α
E	11	A,B,C
F	9	A,B,C
G	12	D,E
H	13	D,E
I	8	D,E
J	10	F
K	11	G,H
ω	0	G,H I,J,K

Tableau 9. Une table d'ordonnancement T.

Calcul des dates de début au plus tôt
Le calcul se fait dans l'ordre croissant des niveaux et les sommets d'un même niveau dans un ordre quelconque.
$do_{\alpha} = 0$ $do_A = do_{\alpha} + 0 = 0$ $do_B = do_{\alpha} + 0 = 0$ $do_C = do_{\alpha} + 0 = 0$ $do_D = \text{Max}[do_A + 5, do_B + 7, do_C + 8] = 8$ $do_E = \text{Max}[do_A + 5, do_B + 7, do_C + 8] = 8$ $do_F = \text{Max}[do_D + 17, do_E + 11] = 25$ $do_G = \text{Max}[do_D + 17, do_E + 11] = 25$ $do_H = \text{Max}[do_D + 17, do_E + 11] = 25$ $do_I = 24 + 9 = 34$ $do_J = \text{Max}[do_G + 12, do_H + 13] = 38$ $do_K = \text{Max}[do_G + 12, do_H + 13] = 38$ $do_{\omega} = \text{Max}[do_I + 8, do_J + 10, do_K + 11] = 50$

Calcul des dates de début au plus tard
Le calcul se fait dans l'ordre décroissant des niveaux et les sommets d'un même niveau dans un ordre quelconque.
$da_{\omega} = do_{\omega} = 50$ $da_I = do_{\omega} - 8 = 42$ $da_J = do_{\omega} - 10 = 40$ $da_K = do_{\omega} - 12 = 38$ $da_F = da_I - 9 = 33$ $da_G = \text{Min}[da_J, da_K] - 12 = 26$ $da_H = \text{Min}[da_J, da_K] - 13 = 25$ $da_D = \text{Min}[da_F, da_G] - 17 = 8$ $da_E = \text{Min}[da_F, da_G] - 11 = 14$ $da_A = \text{Min}[da_D, da_E] - 5 = 3$ $da_B = \text{Min}[da_D, da_E] - 7 = 1$ $da_C = \text{Min}[da_D, da_E] - 0 = 0$ $da_{\alpha} = \text{Min}[da_A, da_B, da_C] - 0 = 0$

Tableau 10. (a) et (b) Dates de début au plus tôt et au plus tard du tableau 9.

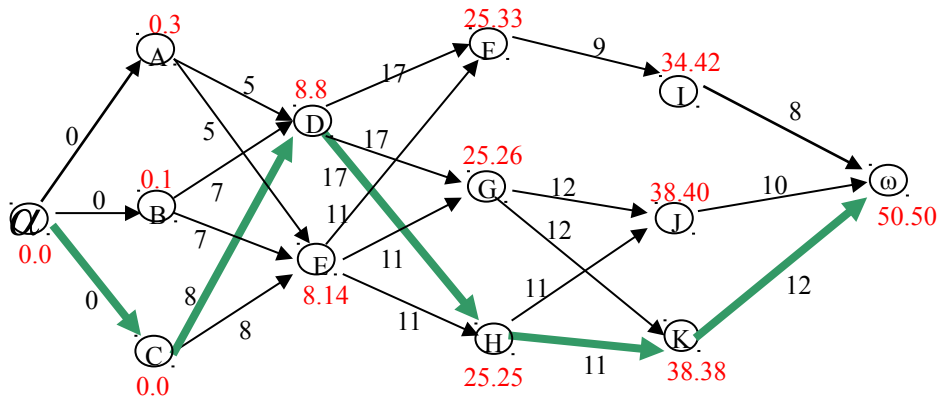


Figure 17. Les dates de début au plus tôt et au plus tard dans le graphe des potentiels.

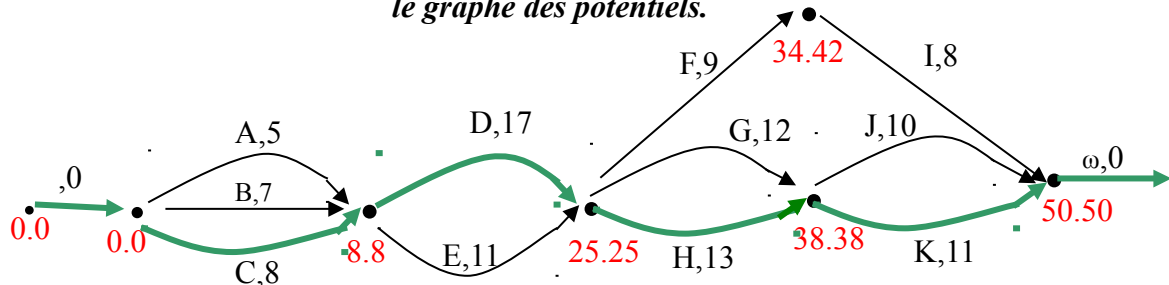


Figure 18. Les dates de début au plus tôt et au plus tard dans le graphe PERT

VII. Comparaison

Nous venons de décrire la modélisation du problème central de l'ordonnancement par les graphes, et plus précisément par la méthode des potentiels (AoN) et la méthode PERT (AoA).

Un inconvénient de cette dernière par rapport à la méthode des potentiels est de doubler initialement les sommets du graphe puisqu'on associe à chaque tâche une étape « début de tâche » et une étape « fin de tâche ».

Une autre difficulté apparaît, comme on l'a vu précédemment, il est souvent nécessaire d'introduire de nombreuses tâches fictives.

De plus, à un même problème correspondent plusieurs graphes PERT plus ou moins simples. N'oublions pas qu'il y a une infinité de graphes PERT à cause des tâches fictives qu'on peut introduire comme on veut et là où on veut puisqu'elles ne nécessitent aucun moyen matériel ou financier qui influe sur la durée ou le coût global du projet.

Parmi les avantages de cette méthode est qu'elle est plus facilement lisible par les praticiens car une tâche est représentée par un arc et un seul. Donc, le nombre de tâches représente le nombre d'arcs réels.

De plus, en disposant ces arcs horizontalement et en leur donnant une longueur proportionnelle à la durée de la tâche, on présente le graphe PERT sous forme de diagramme de Gantt [DUV 00].

VIII Conclusion

Nous venons de voir dans ce chapitre la gestion de projet avec ses différentes étapes. Ensuite nous avons situé la phase ordonnancement dans le cycle de vie d'un projet.

Nous avons étudié les différentes modélisations des problèmes d'ordonnancement de projet dans la littérature ainsi que sa résolution. Cette étude est accompagnée de plusieurs points nouveaux tels que le dessin du graphe PERT. On verra plus tard une autre technique nouvelle de dessin du graphe PERT par les bipartis.

L'objectif de l'ordonnancement central est non seulement d'organiser les activités dans le temps, mais également de permettre aux décideurs d'entreprises d'estimer les dates finales de livrables. Dès lors, l'ordonnancement de projet revêt un intérêt capital de par les estimations qu'il propose et qui servent de base à la prise de décision et à la coordination des ressources internes, des approvisionnements, des relations de sous-traitance et du suivi du projet [PAR 05].