

Les problèmes d'affectation

VI.1. Caractéristiques des problèmes d'affectation

- Les problèmes d'affectation sont un cas spécial du problème de transport où l'offre associée à chaque origine et la demande associée à chaque destination sont égales à 1.
- Les problèmes d'affectation s'appuient sur le principe de **bi-univocité**^{§§§}. Il s'agit d'affecter, à coût minimal, n unités à n tâches ; en sachant qu'une unité ne peut être affectée qu'à une tâche et qu'une tâche ne peut employer qu'une unité.
- Les problèmes d'affectation sont généralement posés comme des problèmes de minimisation des coûts [coûts liés à chaque affectation], mais ils peuvent aussi être posés comme un problème de maximisation [maximisation de rendement de chaque unité affectée].
- La matrice des coûts d'un problème d'affectation doit, avant d'en envisager la résolution, obligatoirement être carrée [de format $n \times n$]. **Si tel n'est pas le cas, toujours la rendre carrée, en ajoutant, selon les cas, une ligne ou une colonne**, avant d'appliquer la méthode hongroise.

La matrice des coûts [profits] associée est $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$

- A chaque solution d'un problème d'affectation, on associe une matrice booléenne avec 1 si l'affectation a lieu et 0 si non.

VI.2. Résolution : L'algorithme de Harold W. Kuhn

L'algorithme de Kuhn ou méthode hongroise [parfois appelé algorithme hongrois] est un algorithme d'optimisation combinatoire qui simplifie la résolution des problèmes d'affectation. Il a été proposé en 1955 par le mathématicien et économiste américain Harold William Kuhn, qui l'a baptisé « méthode hongroise » parce qu'il s'appuyait sur des travaux antérieurs du mathématicien hongrois Dénes König.

La résolution des problèmes d'affectation se fait en trois étapes suivantes :

Etape 1. Réduction de la matrice des coûts

(a) Créer une nouvelle matrice ayant au moins un zéro par ligne et par colonne. Cette matrice est obtenue en soustrayant de chaque coût sur la ligne (la colonne) le coût minimal choisi sur chaque ligne (chaque colonne). On commencera indifféremment en ligne ou en colonne. Mais jamais les deux opérations au même moment.



Dénes König [1884-1944]



Harold W. Kuhn [1925-]

^{§§§} En comptabilité nationale, ce principe signifie qu'une branche ne peut fabriquer qu'un seul produit de la nomenclature retenue et qu'un produit n'est fabriqué que par une seule branche.

Ces éléments retirés à chaque ligne et à chaque colonne afin d'obtenir au moins un zéro par ligne et par colonne, sont appelés **constantes de réduction**.

(b) Après l'obtention d'au moins un zéro par ligne et par colonne, encadrer ensuite un zéro et un seul par ligne et par colonne. C'est-à-dire que lorsqu'un zéro est encadré à l'intersection d'une ligne i et d'une colonne j , les autres zéros sur la ligne i et la colonne j doivent être barrés [supprimés].

(c) La matrice des coûts est dite réduite, **et la solution optimale**, si le nombre de zéros encadrés est égal au format de la matrice. Dans le cas contraire, passer à l'étape 2.

Etape 2. Amélioration de la solution [recherche d'une matrice réduite]

Cette amélioration se fait suivant les opérations ci-dessous :

- (i) Marquer d'une croix toute ligne ne contenant aucun zéro encadré.
- (j) Marquer d'une croix toute colonne ayant un zéro barré sur une ligne ou plusieurs lignes marquées.
- (k) Marquer d'une croix toute ligne ayant un zéro encadré dans une colonne marquée.
- (l) Répéter (i) et (k) jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de colonne ou de ligne à marquer.
- (m) Former une sous matrice W constituée des éléments non couverts par un trait, obtenus en supprimant d'un trait toute ligne non marquée et toute colonne marquée.
- (n) Repérer le plus petit élément de la sous matrice W . Soustraire cette valeur de toutes les cases non couvertes (ou traversées) par un trait, et l'ajouter aux cases situées à l'intersection de deux traits. Les cases traversées une fois ne seront pas modifiées.
- (o) Retourner au point (b) de l'étape 1.

Etape 3. Détermination de la solution optimale ou départ pour une autre amélioration

(i) Si au point (o), on a une matrice réduite, alors la solution est optimale. On peut lui associer une matrice booléenne et calculer le coût total de l'affectation [on reviendra à la matrice des coûts initiale].

Note : - Une autre façon de se rassurer de l'optimalité de la solution est de vérifier que le cout total d'affectation correspond à la somme de toutes les constantes de réduction, de l'étape 1 à l'étape 2.
- Pour le cas de matrice triangulaire, on évitera toute affectation, à l'étape 3, dans les cases situées sur la ligne ou la colonne fictive créée afin d'avoir une matrice carrée.
- Il est possible qu'une solution optimale admette des solutions équivalentes.

(ii) Si au point (o), la matrice n'est pas toujours réduite, alors retourner à l'étape 2.

VI.3. Problème de maximisation

Lorsque les problèmes d'affectation sont posés comme le problème de maximisation, on résoudra le dual. C'est-à-dire que l'on passera d'un maximum à un minimum afin qu'il soit possible d'appliquer la méthode hongroise.

Ce dual est trouvé soit :

- En définissant une matrice des pénalités ; trouvée en retranchant tous les éléments de la matrice d'un nombre au moins égal au plus grand de ces éléments.
- En multipliant toute la matrice des coûts par -1 .

Puis résoudre comme expliqué ci-dessus.

Exercices sur les problèmes d'affectation

Exercice 1

La matrice ci-après établit les coûts de fabrication des ouvriers V, W, X, Y et Z sur les machines A, B, C, D et E.

	A	B	C	D	E
V	12	8	11	15	4
W	7	9	17	14	10
X	9	6	12	7	7
Y	7	8	14	8	10
Z	9	9	13	10	6

Opérer les affectations, de manière à rendre minimal le coût total.

Exercice 2

Une administration désire procéder aux mutations de ses agents A, B, C, D et E et leur offre les postes a, b, c, d, e. Ces fonctionnaires désirant maximiser leur satisfaction générale, décident d'effectuer chacun un classement des postes et obtiennent le tableau suivant regroupant leurs avis :

	a	b	c	d	e
A	12	8	11	15	4
B	7	9	17	14	10
C	9	6	12	7	7
D	7	8	14	8	10
E	9	9	13	10	6

On demande de choisir un chiffre et un seul par ligne et par colonne, de manière que la somme des cinq chiffres choisis soit minimale.

Exercice 3

Une entreprise de construction vient d'ouvrir 4 nouveaux chantiers A, B, C et D. Ces chantiers nécessitent l'emploi de grues se trouvant encore sur des chantiers qui viennent d'être achevés et situés en V, W, X, Y et Z. La durée en heures que prendrait le transport de chacune des grues de l'endroit où elle est située vers chacun des chantiers nouveaux est donnée ci-après : AV : 8 ; AW : 28 ; AX : 17 ; AY : 11 ; AZ : 20 ; BV : 13 ; BW : 28 ; BX : 4 ; BY : 26 ; BZ : 12 ; CV : 38 ; CW : 19 ; CX : 18 ; CY : 15 ; CZ : 6 ; DV : 19 ; DW : 28 ; DX : 24 ; DY : 10 ; DZ : 15. L'entreprise désire démarrer le plus vite possible ses nouveaux chantiers. A quel chantier doit-elle affecter ses grues disponibles.

Exercice 4

On a tiré au hasard les éléments de la matrice ci-dessous à six lignes et six colonnes. Affecter un élément et un seul par ligne et par colonne, de manière à obtenir la somme minimale.

	1	2	3	4	5	6
A	10	90	27	14	39	52
B	29	24	79	90	23	13
C	17	43	62	02	73	70
D	58	14	06	18	16	63
E	15	41	78	44	73	70
F	25	44	81	36	80	80

Exercice 5

Le secrétariat académique de l'Université Protestante au Congo doit affecter 5 économistes candidats assistants aux cours suivants : Microéconomie (C₁), Croissance économique (C₂), Econométrie (C₃), Recherche opérationnelle (C₄) et Macroéconomie (C₅). L'académique souhaite les affecter en optimisant leurs aptitudes à enseigner ces cours. Il dispose pour cela des informations sur les différentes côtes qu'ils ont obtenues dans ces 5 cours pendant leur parcours universitaire comme critère d'affectation.

	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅
E ₁	15	9	7	8	2
E ₂	3	17	4	10	9
E ₃	6	6	8	7	16
E ₄	11	2	16	16	11
E ₅	18	15	03	12	9

Trouver la meilleure affectation sachant que chacun d'eux doit être affecté à un cours et un seul.

Exercice 6

Trois candidats (A, B, et C) ont été présélectionnés pour un programme de bourse organisé dans deux pays : le pays W où le programme est en anglais et le pays X où le programme est en français. La sélection ne portera que sur deux d'entre les trois candidats en fonction de leur aptitude à maîtriser les deux langues.

Un test de langue a été organisé à ce propos, les résultats obtenus sont repris dans le tableau ci-dessous où la cotation est sur 20 points.

	F	A
C	14	13
D	11	8
K	13	11

On vous demande d'affecter les deux candidats qui seront sélectionnés de manière à ce que chacun suit un programme et un seul.

Exercice 7

Au cours des années écoulées, un directeur général a fait circuler ses quatre chefs de vente : DADOU, JUSTIN, BENOIT et ALAIN dans les différents départements de l'entreprise. A la suite de ses expériences, il a noté que dans des conditions équivalentes leurs chiffres d'affaires étaient respectivement proportionnels à 20, 19, 17 et 16.

Les chiffres d'affaires qu'on estime être en mesure de réaliser l'année à venir si l'on disposait à la tête de chacun des départements A, B, C et D un homme de la compétence de Dadou serait : 10, 8, 6 et 5 millions de francs.

Le Directeur général pense que la meilleure formule consiste à affecter les différents départements aux quatre chefs de vente, par ordre d'importance décroissant en chiffre d'affaires, en correspondance avec la notation ci-dessous :

- (i) Le prouver, en correspondance avec la notation ci-dessous ;
- (ii) En admettant que le développement des chiffres d'affaires doive être le suivant :

