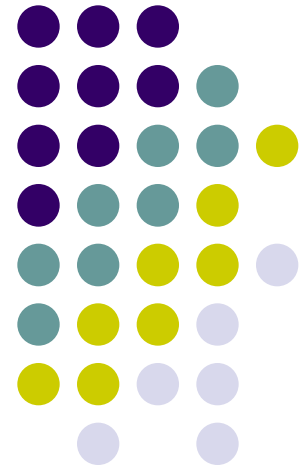


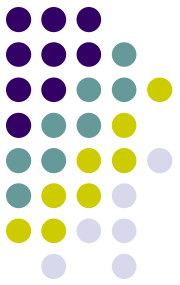
# Logiques de description et Web Sémantique

## Master1

### Chapitre IV: Logiques de description et inférences

#### IV.4 Inférence par tableaux sémantiques

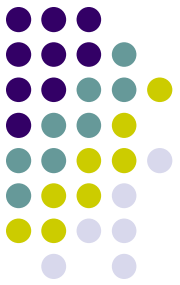




# Plan du cours

- Introduction
- Tableau sémantique (logique propositionnelle)
- Tableau sémantique (LD)
- Exemple introductif:
- Description formelle des règles
- Application des règles
- Terminaison
- Résultat
- Inférence avec des axiomes d'inclusion
- Inférence avec l'ABOX
- Exemples
- Conclusion

# Introduction



- Approches de raisonnement
  - algorithmes structurels (syntaxique)
  - Tableaux sémantiques

# Tableau sémantique (logique propositionnelle)



- La méthode des tableaux est un algorithme qui construit un arbre(tableau) permettant de répondre de façon systématique à la question : la formule  $A$  est-elle valide ?
- **Principe:**
  - si une formule  $A$  est satisfiable, sa négation est insatisfiable
  - si aucune interprétation booléenne ne satisfait  $\neg A$ , on peut en déduire que  $A$  est satisfiable
  - Cette méthode utilise la formule signée:
    - FA : false vérité( $A$ )=0
    - TA : true vérité( $A$ )=1

# Tableau sémantique (logique propositionnelle)



- Algorithme :

1. On inscrit la négation de la formule dans le tableau.
2. Lorsqu'une formule est dans le tableau et n'a pas fait l'objet de l'application d'une règle, on lui applique la règle correspondant à son connecteur principal et sa signature.

|                                                                    |                                                                                  |
|--------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $\frac{T\neg A}{FA}$ $\frac{F\neg A}{TA}$                       | 2) $\frac{T(A\wedge B)}{TA}$ $\frac{F(A\wedge B)}{FA \mid FB}$<br>$TB$           |
| 3) $\frac{T(A\vee B)}{TA \mid TB}$ $\frac{F(A\vee B)}{FA}$<br>$FB$ | 4) $\frac{T(A\rightarrow B)}{FA \mid TB}$ $\frac{F(A\rightarrow B)}{TA}$<br>$FB$ |

*Règles de construction du tableau*

*La barre | signifie ajouter deux branches*

# Tableau sémantique (logique propositionnelle)



- Algorithme :
- 3. Le tableau est complet lorsqu'il n'y a plus de règle à appliquer. **Le « ⊥ »** à la fin de chaque branche sert à indiquer qu'elles sont fermées.

|                                                                           |                                                                                         |
|---------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $\frac{T\neg A}{FA} \quad \frac{F\neg A}{TA}$                          | 2) $\frac{T(A \wedge B)}{TA} \quad \frac{F(A \wedge B)}{FA \mid FB}$<br>$TB$            |
| 3) $\frac{T(A \vee B)}{TA \mid TB} \quad \frac{F(A \vee B)}{FA} \quad FB$ | 4) $\frac{T(A \rightarrow B)}{FA \mid TB} \quad \frac{F(A \rightarrow B)}{TA} \quad FB$ |

Règles de construction du tableau

La barre | signifie ajouter deux branches

# Tableau sémantique (logique propositionnelle)



- Algorithme :résultat
- Si chaque branche fermé contient une variable signée et sa conjugué (Ff et Tf) **alors**  **$\emptyset A$  est insatisfiable** · donc *A est satisfiable*.
- Si un tableau contient au moins une branche et qu'on ne réussit plus à trouver une variable signée et sa conjugué (Ff et Tf) alors  $\emptyset A$  n'est pas insatisfaisable :donc *A n'est pas satisfiable*

# Tableau sémantique (logique propositionnelle)



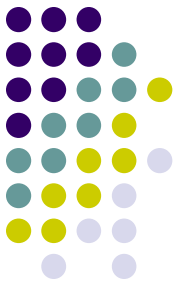
- Exemple :  $((p \vee (q \wedge r)) \rightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)))$

|                                                                       |  |                                |  |
|-----------------------------------------------------------------------|--|--------------------------------|--|
| $F((p \vee (q \wedge r)) \rightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)))$ |  |                                |  |
| $T(p \vee (q \wedge r))$                                              |  |                                |  |
| $F((p \vee q) \wedge (p \vee r))$                                     |  |                                |  |
| $Tp$                                                                  |  | $T(q \wedge r)$                |  |
| $F(p \vee q) \mid F(p \vee r)$                                        |  | $Tq$                           |  |
| $Fp$                                                                  |  | $Tr$                           |  |
| $Fq$                                                                  |  | $F(p \vee q) \mid F(p \vee r)$ |  |
| $Fp$                                                                  |  | $Fp$                           |  |
| $Fr$                                                                  |  | $Fq$                           |  |
| $Fr$                                                                  |  | $Fr$                           |  |
| $\perp$                                                               |  | $\perp$                        |  |
| $\perp$                                                               |  | $\perp$                        |  |

- $\emptyset A$  est insatisfiable donc  $A$  est satisfiable

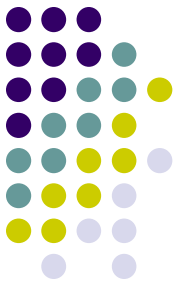


# Tableau sémantique (LD)



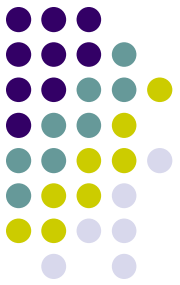
- La meilleure méthode pour faire des inférences avec la logique descriptive
- Le principe de la démonstration est de nier le fait à prouver et on tente de démontrer que ce nouveau fait est insatisfaisable

# Tableau sémantique (LD)



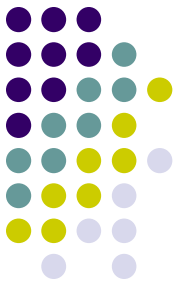
- Exemple introductif:
- $(0) \exists \text{possède.}(\text{Livre} \sqcap \text{Antiquité}) \sqsubseteq (\exists \text{possède.Livre} \sqcap \exists \text{possède.Antiquité})$
- $\exists \text{possède.}(\text{Livre} \sqcap \text{Antiquité}) \sqcap \neg(\exists \text{possède.Livre} \sqcap \exists \text{possède.Antiquité})$

# Tableau sémantique (LD)



- $\exists \text{possède.}(\text{Livre} \sqcap \text{Antiquité}) \sqcap \neg(\exists \text{possède.} \text{Livre} \sqcap \exists \text{possède.} \text{Antiquité})$
- 1-normalisation
  - $\exists \text{possède.}(\text{Livre} \sqcap \text{Antiquité}) \sqcap \neg(\exists \text{possède.} \text{Livre} \sqcap \exists \text{possède.} \text{Antiquité})$
  - $\exists \text{possède.}(\text{Livre} \sqcap \text{Antiquité}) \sqcap (\neg \exists \text{possède.} \text{Livre} \sqcup \neg \exists \text{possède.} \text{Antiquité})$
  - $\exists \text{possède.}(\text{Livre} \sqcap \text{Antiquité}) \sqcap (\forall \text{possède.} \neg \text{Livre} \sqcup \forall \text{possède.} \neg \text{Antiquité})$

# Tableau sémantique (LD)



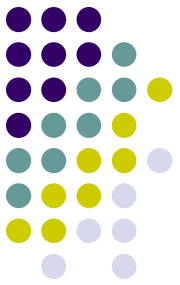
(1)  $\exists \text{possède.}(\text{Livre} \sqcap \text{Antiquité}) \sqcap$   
 $(\forall \text{possède.}\neg \text{Livre} \sqcup \forall \text{possède.}\neg \text{Antiquité})$

- On suppose un individu  $a$  tel que :
- $(\exists \text{possède.}(\text{Livre} \sqcap \text{Antiquité}) \sqcap (\forall \text{possède.}\neg \text{Livre} \sqcup \forall \text{possède.}\neg \text{Antiquité}))(a)$

(2)  $(\exists \text{possède.}(\text{Livre} \sqcap \text{Antiquité}))(a)$

(3)  $(\forall \neg \text{possède.}\text{Livre} \sqcup \forall \neg \text{possède.}\text{Antiquité})(a)$

# Tableau sémantique (LD)



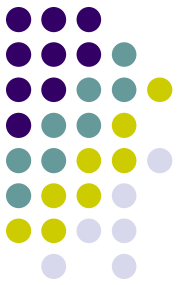
(2)  $(\exists \text{possède} . (\text{Livre} \sqcap \text{Antiquité})) (a)$

(3)  $(\forall \neg \text{possède} . \text{Livre} \sqcup \forall \neg \text{possède} . \text{Antiquité}) (a)$

On suppose un objet  $b$  (livre, antiquité) alors

- (4)  $\text{possède}(a, b)$
- (5)  $(\text{Livre} \sqcap \text{Antiquité})(b)$
- (6)  $\text{Livre}(b)$
- (7)  $\text{Antiquité}(b)$

# Tableau sémantique (LD)



(2)  $(\exists \text{possède} . (\text{Livre} \sqcap \text{Antiquité})) (a)$

(3)  $(\forall \neg \text{possède} . \text{Livre} \sqcup \forall \neg \text{possède} . \text{Antiquité}) (a)$

- (8)  $(\forall \text{possède} . \neg \text{Livre}) (a)$

Ou bien

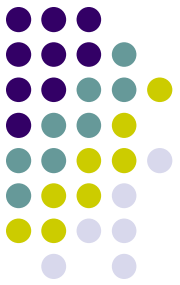
- (9)  $(\forall \text{possède} . \neg \text{Antiquité}) (a)$

- Supposons que (8) est vrai. On sait déjà que  $a$  possède  $b$ . L'objet ne peut donc pas être un livre :

- (10)  $\neg \text{Livre}(b)$

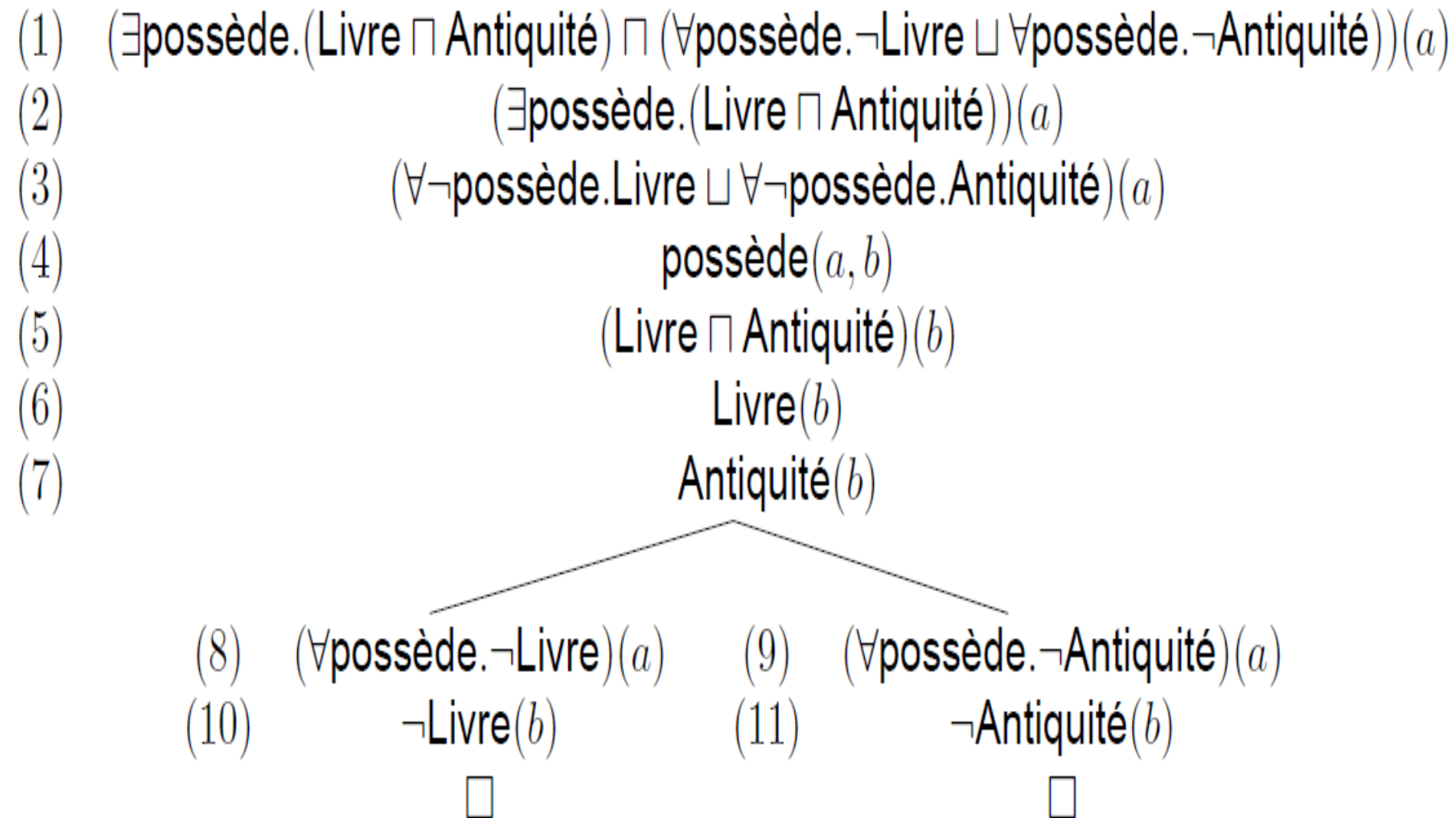
- (11)  $\neg \text{Antiquité}(b)$

# Tableau sémantique (LD)



- (4) possède(a, b)
- (6) Livre(b)
- (7) Antiquité(b)
- (10)  $\neg$ Livre(b)
- (11)  $\neg$ Antiquité(b)
- -> Contradiction  $\square$
- -> énoncé initial (1) est insatisfaisable
- -> La subsomption (0) est donc prouvée

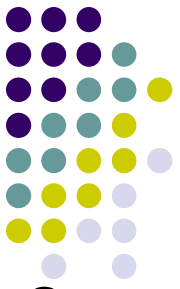
# Tableau sémantique (LD)





# Tableau sémantique (Description formelle)

## Description formelle des règles



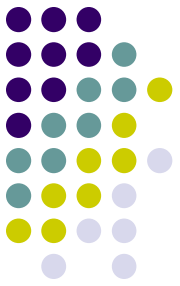
Supposons que nous voulions prouver  $C \sqsubseteq D$ . Le principe de la démonstration est le suivant:

- On nie le fait à prouver et on tente de démontrer que ce nouveau fait est insatisfaisable.
- Dans notre cas, cela revient à démontrer que  $C \sqcap \neg D$  est insatisfaisable.
- un tableau  $A$  prend la forme d'un arbre avec plusieurs chemins qui vont de la racine de l'arbre à une feuille

# Tableau sémantique (Description formelle)

Description formelle des règles

règle- $\sqcap$



## Condition

- A contient  $(C1 \sqcap C2)(x)$  et ne contient pas déjà les deux énoncés  $C1(x)$  et  $C2(x)$ .

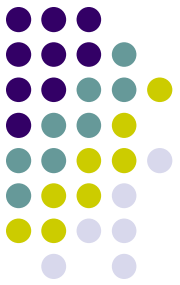
## Action

- On ajoute à A les énoncés  $C1(x)$  et  $C2(x)$

# Tableau sémantique (Description formelle)

Description formelle des règles

règle- $\sqcup$



## Condition

- A contient  $(C1 \sqcup C2)(x)$  et ne contient aucun des deux énoncés  $C1(x)$  et  $C2(x)$ .

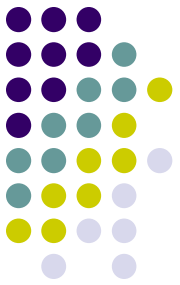
## Action

- On ajoute à A le branchement suivant :  
 $C1(x)$   
 $C2(x)$

# Tableau sémantique (Description formelle)

Description formelle des règles

règle- $\exists$



## Condition

- contient  $(\exists R.C)(x)$  et il n'existe aucun individu  $z$  tel que  $R(x, z)$  et  $C(z)$  sont aussi dans  $A$

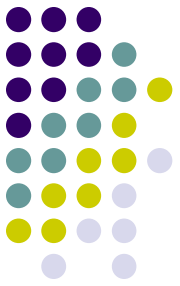
## Action

On ajoute  $R(x, y)$  et  $C(y)$  à  $A$ , où  $y$  est un nom d'individu qui n'existe pas déjà dans  $A$

# Tableau sémantique (Description formelle)

## Description formelle des règles

règle- $\forall$



### Condition

- A contient  $(\forall R.C)(x)$  et  $R(x, y)$ , mais ne contient pas  $C(y)$

### Action

On ajoute  $C(y)$  à A

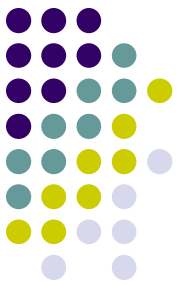
# Tableau sémantique (Description formelle)

Description formelle des règles

règle- $\geq$

## Condition

- A contient  $(\geq n R)(x)$  et il n'y a pas dans A des individus  $z_1, \dots, z_n$  qui sont tous distincts
- (c'est-à-dire qu'on doit avoir explicitement dans A l'énoncé  $z_i \neq z_j$  pour chaque paire possible avec cet ensemble d'individus) et qui sont tels que A contient la relation  $R(x, z_i)$  pour tous ces individus ( $1 \leq i \leq n$ ).



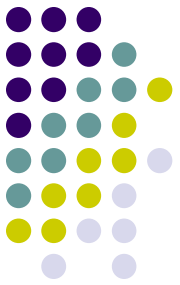
# Tableau sémantique (Description formelle)

Description formelle des règles

règle- $\geq$

## Action

Soit un ensemble de  **$n$**  individus dénotés par  $y_1, \dots, y_n$ , qui sont des noms qui n'existent pas dans  $A$ . On ajoute à  $A$  les énoncés  $y_i \neq y_j$  pour chaque paire possible avec cet ensemble, ainsi que les énoncés  $R(x, y_i)$  pour  $(1 \leq i \leq n)$ .



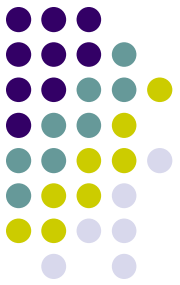
# Tableau sémantique (Description formelle)

Description formelle des règles

règle- $\leq$

**Condition**

- A contient  $(\leq n R)(x)$  et les énoncés  $R(x, y_1), \dots, R(x, y_{n+1})$ . Il n'existe aucune identité  $y_i = y_j$  dans A pour  $(1 \leq i \leq n + 1), (1 \leq j \leq n + 1), i \neq j$





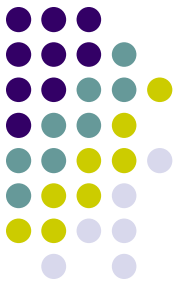
# Tableau sémantique (Description formelle)

Description formelle des règles

règle- $\leq$

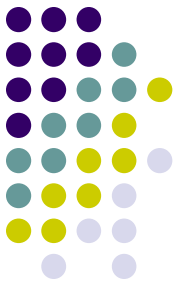
## Action

Pour chaque paire possible  $(y_i, y_j)$  d'individus parmi  $y_i, y_{n+1}$ , on ajoute une nouvelle branche avec  $y_i = y_j$ .



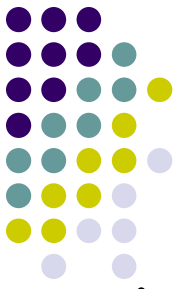
# Tableau sémantique (Description formelle)

## Application des règles



Pour chaque règle appliquée, on ajoute les nouveaux énoncés à la fin à partir de la branche où on se trouve. On les ajoute généralement à la fin de tous les branchements à partir du point où on se trouve

# Tableau sémantique (Description formelle) contradiction

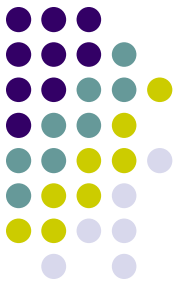


On ajoute la contradiction  $\square$  à la fin d'un chemin A lorsqu'une des situations suivantes se présente :

- A contient à la fois un énoncé de la forme  $C(x)$  et son complément  $\neg C(x)$
- A contient un énoncé de la forme  $C(x)$ , un énoncé de la forme  $\neg C(y)$  et une des identités  $x = y$  ou  $y = x$ .
- A contient un énoncé de la forme  $\perp(x)$  (qui signifie que l'individu  $x$  ne peut pas exister)

# Tableau sémantique (Description formelle)

## Terminaison



- Lorsque toutes les branches d'un tableau sont fermées, on dit que le tableau est fermé et l'énoncé initial est considéré insatisfaisable.
- Si un tableau contient au moins une branche ouverte et qu'on ne réussit plus à appliquer des règles pour en faire l'expansion, le processus s'arrête et on conclut que l'énoncé initial n'est pas insatisfaisable

# Tableau sémantique (Description formelle)

Exemple 2 :

TBOX :

$\text{Parent} \equiv \exists a\text{Enfant}.T$

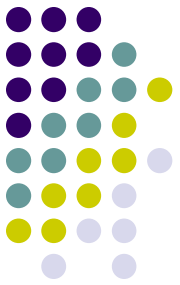
On veut prouver :

$\geq 2 a\text{Enfant} \sqsubseteq \text{Parent}$

Alors prouver  $\geq 2 a\text{Enfant} \sqcap \neg \text{Parent}$  est insatisfiable

Éliminer la TBOX :  $\geq 2 a\text{Enfant} \sqcap \neg(\exists a\text{Enfant}.T)$

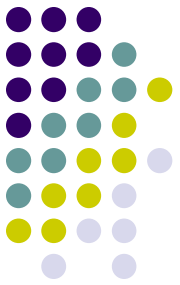
Normaliser la formule :  $\geq 2 a\text{Enfant} \sqcap \forall a\text{Enfant}.\perp$



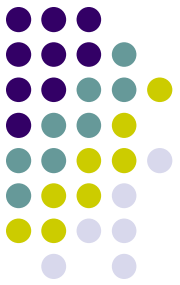
# Tableau sémantique (Description formelle)

Exemple 2 :

- (1)  $\geq 2 \text{ aEnfant} \sqcap \forall \text{aEnfant}.\perp)(a)$
- (2)  $(\geq 2 \text{ aEnfant})(a)$
- (3)  $(\forall \text{aEnfant}.\perp)(a)$
- (4)  $\text{aEnfant}(a, b)$
- (5)  $\text{aEnfant}(a, c)$
- (6)  $b \neq c$
- (7)  $\perp(b)$
- (8)  $\perp(c)$
- (9)  $\square$



# Tableau sémantique (Description formelle)



Exemple 3 :

TBOX :

$\text{Parent} \equiv \exists a\text{Enfant}.T$

$\text{ParentDeFamilleNombreuse} \equiv \text{Parent} \sqcap \geq 3$

$a\text{Enfant}$

On veut prouver :

$\geq 4 a\text{Enfant} \sqsubseteq \text{ParentDeFamilleNombreuse}$

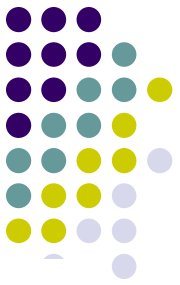
Alors prouver :

$(\geq 4 a\text{Enfant} \sqcap \neg \text{ParentDeFamilleNombreuse})(a)$   
est insatisfiable

Éliminer la TBOX et normalisation:

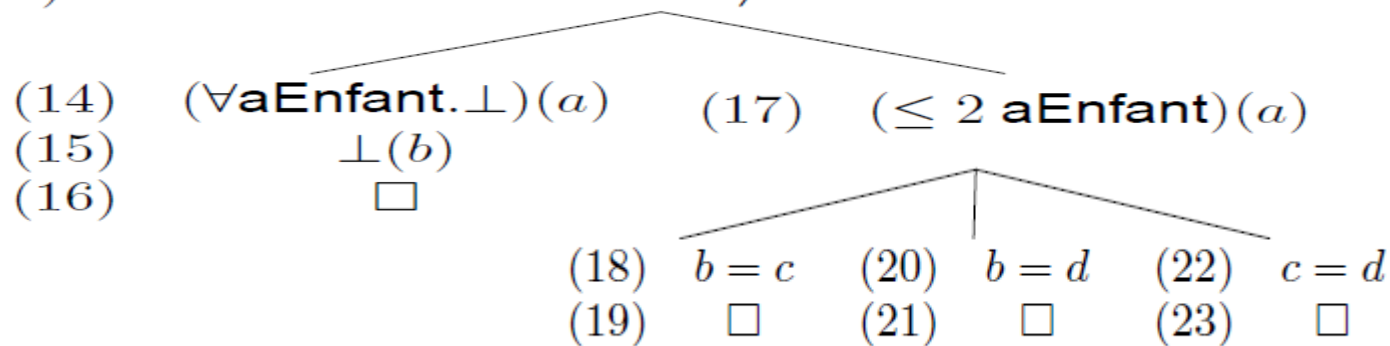
$(\geq 4 a\text{Enfant} \sqcap (\forall a\text{Enfant}.\perp \sqcup \leq 2 a\text{Enfant}))(a)$

# Tableau sémantique (Description formelle)



Exemple :

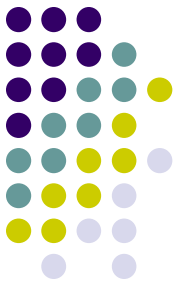
- (1)  $(\geq 4 \text{ aEnfant} \sqcap (\forall \text{aEnfant}.\perp \sqcup \leq 2 \text{ aEnfant}))(a)$
- (2)  $(\geq 4 \text{ aEnfant})(a)$
- (3)  $(\forall \text{aEnfant}.\perp \sqcup \leq 2 \text{ aEnfant})(a)$
- (4)  $\text{aEnfant}(a, b)$
- (5)  $\text{aEnfant}(a, c)$
- (6)  $\text{aEnfant}(a, d)$
- (7)  $\text{aEnfant}(a, e)$
- (8)  $b \neq c$
- (9)  $b \neq d$
- (10)  $b \neq e$
- (11)  $c \neq d$
- (12)  $c \neq e$
- (13)  $d \neq e$





# Tableau sémantique (Description formelle)

## Inférence avec des axiomes d'inclusion



Dans la méthode d'inférence présentée à la section précédente, on ne peut traiter que des axiomes d'équivalence. Or, une ontologie peut aussi contenir des axiomes d'inclusion.

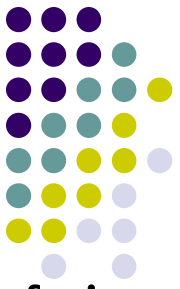
Exemple :

$\text{Plante} \equiv \text{Vivant} \sqcap \exists \text{aime.Plante}$

$\exists \text{aime.T} \sqsubseteq \text{Animal}$

# Tableau sémantique (Description formelle)

## Inférence avec des axiomes d'inclusion



Pour pouvoir raisonner avec ce type d'axiome, il faut faire un petit ajout au mécanisme d'inférence.

Il faudra d'abord transformer tout axiome d'inclusion de la forme  $C \sqsubseteq D$  en un axiome équivalent  $T \sqsubseteq \neg C \sqcup D$ .

### Exemple

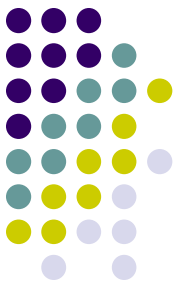
$\text{Plante} \equiv \text{Vivant} \sqcap \exists \text{aime}.\text{Plante}$   
 $\exists \text{aime}.T \sqsubseteq \text{Animal}$

### Deviendra

$\text{Plante} \equiv \text{Vivant} \sqcap \exists \text{aime}.\text{Plante}$   
 $T \sqsubseteq \forall \text{aime}.\bot \sqcup \text{Animal}$

# Tableau sémantique (Description formelle)

Inférence avec des axiomes d'inclusion



Exemple :  $\text{Plante} \sqcap \neg \text{Animal}$ .

(1)  $(\text{Vivant} \sqcap \exists \text{aime.Plante} \sqcap \neg \text{Animal})(a)$

(2)  $\text{Vivant}(a)$

(3)  $(\exists \text{aime.Plante})(a)$

(4)  $\neg \text{Animal}(a)$

(5)  $\text{aime}(a, b)$

(6)  $\text{Plante}(b)$

(7)  $(\forall \text{aime}.\perp \sqcup \text{Animal})(a)$

(8)  $(\forall \text{aime}.\perp)(a)$

(9)  $\perp(b)$

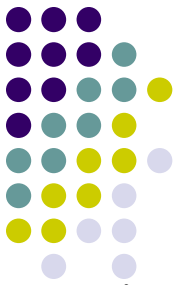
(10)  $\square$

(11)  $\text{Animal}(a)$

(12)  $\square$

# Tableau sémantique (Description formelle)

## Inférence avec l'ABOX



l'ABOX fournit des faits explicites sur l'état du monde mais on doit également prendre en considération lors du raisonnement les faits implicites non directement déclarés Sans l'ABOX .

Donc Il faut ajouter pour chaque concept tous les faits correspondants aux concepts apparaissant dans sa définition NNF.

### Exemple

Woman  $\equiv$  Person  $\sqcap$  Female

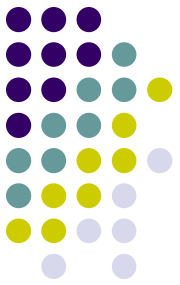
Man  $\equiv$  Person  $\sqcap \neg$ Woman

Father  $\equiv$  Man  $\sqcap \exists \text{hasChild. Person}$

ABOX  $\text{/: Father (Ahmed)}$

# Tableau sémantique (Description formelle)

Inférence avec l'ABOX



## Exemple

$\text{Woman} \equiv \text{Person} \sqcap \text{Female}$

$\text{Man} \equiv \text{Person} \sqcap \neg \text{Woman}$

$\text{Father} \equiv \text{Man} \sqcap \exists \text{hasChild}.\text{Person}$

NNF Father :

$\text{Father} \equiv \text{Person} \sqcap \neg \text{Woman} \sqcap \exists \text{hasChild}.\text{Person}$

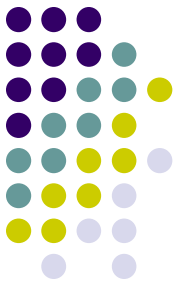
Father (Ahmed) :  $\rightarrow$  Il faut ajouter

$\exists \text{hasChild}.\text{Person}(\text{Ahmed})$

$\text{Person}(\text{Ahmed})$

$\neg \text{Woman}(\text{Ahmed})$

# Conclusion



- Un tableau sémantique est un système de réfutation qui réduit le problème de subsomption au problème de satisfiabilité.
- Les tableaux sémantiques sont un outil principal pour les problèmes de Satisfaisabilité et de subsomption de concept dans les LDs.
- Algorithme de tableau qui représente la base de tous les raisonneurs de la logique de description.