

3. TD : EQUATION DES ONDES

Exercice 3.1. Soit Ω un domaine régulier de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha > 0$ est une constante. Considérons le problème suivant.

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \alpha u = f, & \text{dans }]0, T[\times \Omega, \\ u = 0, & \text{sur }]0, T[\times \Gamma, \\ u(0) = u^0, u'(0) = u^1. \end{cases} \quad (*)$$

ou $u^0 \in H_0^1(\Omega)$, $u^1 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

(1) Supposons qu'il existe deux solutions u_1 et u_2 de ce problème. Quelle est l'équation vérifiée par $w = u_1 - u_2$.

(2) Pour tous $s \in]0, T]$, on définit les fonctions suivantes

$$\psi(t) = \begin{cases} \int_t^s w(\sigma) d\sigma, & 0 \leq t \leq s \\ 0, & s < t \leq T \end{cases}$$

a) Calculer $\psi(s)$, $\dot{\psi}(0)$ et $\dot{\psi}(t)$.

b) Prendre ψ comme fonction test de l'équation satisfait par w , intégrer sur $[0, T]$, et déduire que la solution du problème (*) est unique.

Exercice 3.2. Soit $T > 0$, $\beta \geq 0$ et Ω un domaine régulier de $\mathbb{R}^n$. On considère le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \beta \int_{\Omega} u_t dx = 0, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u^0, u_t(x, 0) = u^1 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

et on suppose qu'il admet une solution régulière, i.e. $u \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, T])$.

(a) Démontrer que l'énergie $E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t)^2 + (u_x)^2 dx$ est une fonction décroissante en t .

(b) Déduire que cette solution est unique.

Exercice 3.3. Soit $\alpha > 0$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue satisfaisant

$$|g(z)| \leq \alpha |z|, \forall z \in \mathbb{R}.$$

On considère l'équation d'ondes suivante

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + g(u) = 0, & \text{pour } (x, t) \in]0, 1[\times]0, T[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & \text{pour } t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 1 & \text{pour } x \in]0, 1[. \end{cases} \quad (**)$$

et on définit l'énergie de la solution de (**) par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u_t(t, x)|^2 + |u_x(t, x)|^2 dx.$$

(1) Démontrer que $E(t)$ satisfait

$$E(t) \leq \frac{1}{2} e^{\alpha T}, \quad \forall t \in [0, T].$$

(2) Améliorer cette inégalité, i.e. remplacer $e^{\alpha T}/2$ par une valeur plus petite.