

2. TD : EQUATIONS PARABOLIQUES

Exercice 2.1. Soit $u^0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et notons u l'unique solution du problème

$$\begin{cases} u' - \Delta u = f & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } (0, T) \times \Gamma, \\ u(0) = u^0. \end{cases}$$

- i) Vérifier que la fonction $w = e^{-\lambda t} u$ et sa dérivée est dans les mêmes espaces de u et u' .
 ii) Vérifier que w est solution d'une EDP à déterminer.

Exercice 2.2. Soit $u(x, t)$ la température en temps t au point x , $-L \leq x \leq L$ et $\varphi \in L^2(-L, L)$. On suppose qu'elle satisfait l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & -L < x < L, \quad t > 0, \\ u(-L, t) = u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & -L < x < L. \end{cases} \quad (*)$$

- (1) Démontrer que $E(t) := \frac{1}{2} \int_{-L}^L u^2(x, t) dx$ est une fonction décroissante en t .
 (2) Soit f et g sont des fonction donnée. Utiliser le resultat précédent pour démontrer l'unicité de la solution de l'équation

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0, & -L < x < L, \quad t > 0, \\ v(-L, t) = f(t), \quad v(L, t) = g(t), & t > 0, \\ v(x, 0) = \varphi(x), & -L < x < L. \end{cases} \quad (*)$$

- (3) Dédurre aussi que si $\varphi(x)$ est une fonction paire et $u(-L, t) = u(L, t)$, alors la température $u(x, t)$ est aussi une fonction paire en $x, \forall t \geq 0$.

Exercice 2.3. Soit $\ell > 0$ un nombre positif. Soit $Q = (0, +\infty) \times (0, \ell)$, et soit $u(t) = u(t, \cdot)$ la solution (régulière) du problème

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = 0, & (t, x) \in Q, \\ u(0, x) = \frac{1}{\ell^2} x(\ell - x), & x \in (0, \ell) \\ u(t, 0) = u(t, \ell) = 0, & t \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Le but de cet exercice est de démontrer que la solution décroît exponentiellement en t , sans résoudre l'EDP.

- (1) Calculer $\|u(0)\|_{L^2(0, \ell)}$.

- (2) Démontrer que

$$\frac{d}{dt} \left(\|u(t)\|_{L^2(0, \ell)}^2 \right) = -2 \|\partial_x u(t)\|_{L^2(0, \ell)}^2.$$

(3) Démontrer que $|u(t)| \leq \sqrt{\ell} \|\partial_x u(t)\|_{L^2(0,\ell)}$ et déduire que

$$\|u(t)\|_{L^2(0,\ell)}^2 \leq \ell^2 \|\partial_x u(t)\|_{L^2(0,\ell)}^2.$$

(4) En utilisant les résultats précédents, déduire que

$$\frac{d}{dt} \left(\|u(t)\|_{L^2(0,\ell)}^2 \right) \leq -\frac{2}{\ell^2} \|u(t)\|_{L^2(0,\ell)}^2$$

et finalement que

$$\|u(t)\|_{L^2(0,\ell)} \leq \sqrt{\frac{\ell}{30}} e^{-\frac{1}{\ell^2} t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Exercice 2.4. Soit $T > 0$. On considère $u(t, x) \in C^2([0, T] \times [0, 1])$, la solution de l'équation suivante

$$\begin{cases} u_t - (1+x^2)u_{xx} + xu_x = \sin 2\pi x, & x \in (0, 1), t \in (0, T), \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, & \forall t \in (0, T), \\ u(0, x) = 0, & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (*)$$

où u_t et u_x note les dérivées en t et x .

(1) Donner la formulation variationnelle du problème (*).

(2) Démontrer que

$$\left| \int_0^1 \sin(2\pi x) v \, dx \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \|v_x\|_{L^2(0,1)}, \quad \forall v \in H_0^1([0, 1]).$$

(3) Vérifier que l'opérateur A définie par

$$v \mapsto A(v) = -(1+x^2)v_{xx} + xv_x$$

est coercive sur $H_0^1([0, 1])$, précisément démontrer que

$$\int_0^1 A(v) v \, dx \geq \left(1 - \frac{3}{2\pi^2}\right) \|v_x\|_{L^2(0,1)}^2, \quad \forall v \in H_0^1([0, 1]).$$

(4) Démontrer que

$$\int_0^1 A(v) w \, dx \leq \left(2 + \frac{3}{\pi}\right) \|v_x\|_{L^2(0,1)} \|w_x\|_{L^2(0,1)}, \quad \forall v, w \in H_0^1([0, 1]).$$

(5) Démontrer que la solution de (*) satisfait

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L^2(0,1)} \leq C_1 \quad \text{et} \quad \int_0^T \|u_x(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \, ds \leq C_2$$

où C_1 et C_2 sont des constantes indépendante de t .

Aide : La constante de Poincaré est $\frac{1}{\pi}$ et $2ab \leq a^2 + b^2$.

Exercice 2.5. Soit $g \in L^2(\Omega)$. On considère le problème d'évolution suivante

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u + u^3 = 0, & (x, t) \in]0, 1[\times [0, +\infty[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & \forall t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), & \forall x \in]0, 1[\end{cases}$$

- (1) Donner une formulation faible de ce problème, en précisant les espaces de u et $\partial_t u$.
- (2) On note $P(t) = \|u(t)\|_{L^2(0,1)}^2$ et on veut obtenir de estimation de plus en plus fine pour $P(t)$.

(a) Démontrer que $P'(t) \leq 0$ et déduire que

$$P(t) \leq \|g\|_{L^2(0,1)}^2, \forall t > 0.$$

(b) En utilisant l'inégalité de Poincaré (La constante de Poincaré est $\frac{1}{\pi}$), démontrer que

$$P'(t) \leq -2\pi^2 P(t) - 2 \int_0^1 u^4(t) dx$$

et déduire que $P(t) \leq P(0) e^{-2\pi^2 t}$.

(c) En utilisant l'inégalité de Hölder pour estimer $\int_0^1 u^4(t) dx$, démontrer que

$$P'(t) \leq -2\pi^2 P(t) - 2P^2(t) \quad (*)$$

et déduire que

$$P(t) \leq \left(\frac{\pi^2 P(0)}{\pi^2 + P(0)(1 - e^{-2\pi^2 t})} \right) e^{-2\pi^2 t}.$$

Aide : Avec le changement de variable $Z(t) = \frac{1}{P(t)}$, l'EDO (*) devient linéaire.

Exercice 2.6. On considère l'équation de la chaleur suivante

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + f(t)y = 0, & \text{pour } (x, t) \in]0, 1[\times]0, T[, \\ y(0, t) = y(1, t) = 0, & \text{pour } t \in]0, T[, \\ y(x, 0) = \sin(\pi x), & \text{pour } x \in]0, 1[, \end{cases} \quad (*)$$

où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit l'énergie de la solution par

$$H(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 |y(t, x)|^2 dx.$$

(1) On suppose $f(t) = t$.

(a) Démontrer que $\frac{d}{dt} H(t) \leq 0$ et déduire l'unicité de la solution.

(b) Démontrer que $H(t) \leq H(0) e^{-t^2}$, (Il faut calculer $H(0)$).

(2) On suppose maintenant $f(t) = -t^2$.

Démontrer qu'il existe un instant $T_1 > 0$ tel que $\frac{d}{dt} H(t) \leq 0$ pour $t \in [0, T_1]$, (Il faut préciser la valeur de T_1).