Université de M'sila
Faculté MI
Département de Math.
Master EDP, (M1)

Problèmes d'Evolution

Examen Final

2022/2023

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction seront prises en compte à la correction. Les résultats finaux devront être encadrés.

Exercice 1 *Soit $T > 0$ et X un espace de Banach de norme $\| \cdot \|_X$.*

i) Rappeler la définition de l'espace $L^p(0,T;X)$, pour $1 \leq p < +\infty$ et $p = +\infty$.

ii) Si $X = H^1(]0,1[)$. Rappeler les normes de

$$H^1(0,1), \quad L^2\left(0,T;H^1(0,1)\right).$$

iii) Pour quelle valeurs de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on $t^\alpha x^\beta \in L^2\left(0,T;H^1(0,1)\right)$.

Exercice 2 *Soit $T > 0$ et $\gamma \geq 0$. On considère l'équation de la chaleur suivante*

$$u_t - u_{xx} + \gamma u = 0, \qquad \text{pour } (x,t) \in]0,1[\times]0,T[, \tag{*}$$

avec la condition initiale

$$u(x,0) = 1 + \cos(\pi x), \text{ pour} x \in]0,1[.$$

On definie les deux fonctions

$\int_0^1 (1+\cos(\pi x))\,dx = 1.0 = 1$

$$H(t) = \int_0^1 |u(x,t)|^2\,dx \quad \text{et} \quad m(t) = \int_0^1 u(x,t)\,dx.$$

Cas I: *On prend $\gamma > 0$ et on considère les conditions aux limites*

$$u_x(0,t) = u(1,t) = 0, \quad \text{pour } t \in]0,T[.$$

1. *Quel-est le type de ces conditions aux limites.*
2. *Est-ce-que $H(t)$ est décroissante?*
3. *Demontrer l'unicité de la solution.*
4. *Demontrer que $H(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$ dans ce cas?*

Cas II: *On prend $\gamma = 0$ et on considère maintenant les conditions aux limites*

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad \text{pour } t \in]0,T[.$$

1. *Quel-est le type de ces conditions aux limites.*
2. *Démontrer que $m(t)$ est constante et calculer sa valeur.*
3. *Est-ce-que $H(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$ dans ce cas?*
4. *Est-ce-que la solution reste unique dans ce cas?*

A. Sengouga.

Evolution problems: final exam correction

$\boxed{\text{M1. EDP.}}$

Exercice $\boxed{1}$

i) $L^p(0,T;X) = \{ u : [0,T] \to X$, mesurable and $\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dx < +\infty \}$

$L^\infty(0,T;X) = \{ u : [0,T] \to X$, mesurable and $\underset{0\le t\le T}{\text{ess sup}} \|u(t)\|_X < +\infty \}$

ii) $\|u\|_{H^1(0,1)} = \left(\int_0^1 u^2 + (u')^2 \, dx \right)^{1/2}$

$\|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))} = \left(\int_0^T \int_0^1 u^2 + (u')^2 \, dx\, dt \right)^{1/2}$

iii) We must have $\|t^\alpha x^\beta\|_{L^2(0,T;H^1(0,1))} < +\infty$

$\|t^\alpha x^\beta\|^2_{L^2(0,T;H^1(0,1))} = \int_0^T \int_0^1 (t^\alpha x^\beta)^2 + (\beta t^\alpha x^{\beta-1})^2 \, dx\, dt$

$= \left(\int_0^T t^{2\alpha} dt\right)\left(\int_0^1 x^{2\beta} dx\right) + \beta^2 \left(\int_0^T t^{2\alpha} dt\right)\left(\int_0^1 x^{2(\beta-1)} dx\right)$

these integrals are finite iff $2\alpha+1>0$, $2\beta+1>0$ and $2(\beta-1)+1>0$

i.e. $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\beta > -\frac{1}{2}$ and $\beta > \frac{1}{2}$.

thus $t^\alpha x^\beta \in L^2(0,T;H^1(0,1)) \iff \alpha > -\frac{1}{2}$ and $\beta > \frac{1}{2}$

Exercice [2] Case I : $\begin{cases} u_t - u_{xx} + \gamma u = 0 \\ u_x(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = 1 + \cos(5x). \end{cases}$ $(*)$

1) we have a mixed type of Boundary conditions

2) we compute $\frac{d}{dt} H(t) = 2 \int_0^1 u_t u \, dx =$

$$= 2 \int_0^1 (u_{xx} - u) u \, dx \quad (\text{using the equation } *)$$

$$= 2 \int_0^1 u_{xx} u \, dx - 2 \int_0^1 u^2 dx$$

$$= \cancel{2 u_x u \Big]_0^1}^{\,0} - 2 \int_0^1 u_x^2 dx - 2 \int_0^1 u^2 dx \leq 0$$

thus $H(t)$ is a deacreasing function.

3) To show the uniqueness, assume that we have two solutions u_1 and u_2.

then $w = u_1 - u_2$, satisfies $\begin{cases} w_t - w_{xx} + \gamma w = 0 \\ w_x(0,t) = w(1,t) = 0 \\ w(x,0) = 0 \end{cases}$

since $H(t)$ is deacreasing,

$$\int_0^1 w^2(t,x) \, dx = \frac{1}{2} H(t) \leq \frac{1}{2} H(0) = \int_0^1 0^2 dx = 0$$

thus $\int_0^1 w^2(t,x) \, dx = 0 \Rightarrow w(t,x) = 0$, a.e. $x \in (0,1)$, $t \in (0,T)$

i.e. $w = 0$ and $u_1 = u_2$ a.e. $x \in (0,1)$, $t \in (0,T)$,

and the uniqueness follows.

4) we have $\frac{d}{dt}H(t) = -2\int_0^1 u_x^2\,dx - 2\int_0^1 u^2\,dx$

$\leq -2\int_0^1 u^2\,dx = -2H(t).$

So $H(t)$ satisfies $\frac{d}{dt}H(t) + 2H(t) \leq 0$

multiplying by e^{2t}, we get $\frac{d}{dt}\left(e^{2t}H(t)\right) \leq 0$

Integrating, we get $\int_0^s \frac{d}{dt}\left(e^{2t}H(t)\right)dt = e^{2t}H(t)\Big]_0^s \leq 0$

thus $e^{2s}H(s) - e^{2\cdot 0}H(0) \leq 0 \Rightarrow H(s) \leq H(0)e^{-2s}$.

$H(0) = \int_0^1 1+\cos\pi x\,dx \leq \int_0^1 2\,dx \leq 2$, the $H(s) \leq 2e^{-2s} \longrightarrow 0$ as $s \longrightarrow +\infty$

Case II:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \\ u(x,0) = 1 + \cos(\pi x). \end{cases}$$

1) we have Newmann boundary conditions

2) we compute $\frac{d}{dt}m(t) = \int_0^1 u_t\,dx = \int_0^1 u_{xx}\,dx = u_x\Big]_0^1 = 0$

thus $m(t) = cste = \int_0^1 1+\cos(\pi x)\,dx = 1$

3) Using Cauchy-Schwarz inequality we have

$$1 = \int_0^1 u(t)\,dx = \int_0^1 1.u(t)\,dx \leq \left(\int_0^1 1^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 u^2 dx\right)^{1/2} = 1.\sqrt{H(t)}$$

i.e $H(t) \geq 1$, $\forall t > 0$,

and by consequence: $H(t) \not\to 0$, as $t \longrightarrow +\infty$

4) Yes, we still have the uniqueness. It suffices to repeat the argument above in Case I, question 3) with $\gamma = 0$.