

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction seront prises en compte à la correction. Les résultats finaux devront être encadrés.



Exercice 1 Soit $T > 0$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et on considère l'équation de la chaleur suivante

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + g(u) = 0, & \text{pour } (x, t) \in]0, 1[\times]0, T[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & \text{pour } t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = x\sqrt{1-x}, & \text{pour } x \in]0, 1[. \end{cases} \quad (*)$$

où u_t et u_x note les dérivées en t et x de u . On note par $u(t)$ la fonction $x \mapsto u(x, t)$.

Dans la suite on prend deux choix pour la fonction g .

Cas I: On prend $g(u) = 0$.

1. Rappeler la définition, le produit scalaire et la norme de l'espace $H_0^1(]0, 1[)$.
2. Quelle est l'espace de $u(t)$, $u_t(t)$ et $u_x(t)$. (question de cours).

Cas II: On suppose maintenant que $g(u) = (2 + \sin(u))u$.

1. Donner la formulation variationnelle du problème (*) et vérifier que l'intégrale $\int_0^1 g(u(t))u(t)dx$ est fini si $u(t) \in L^2(0, 1)$.

2. Démontrer que

$$\frac{d}{dt} (e^{2t} \|u(t)\|_{L^2(0,1)}^2) \leq 0.$$

3. Dédurre que

$$\|u(t)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq Ce^{-2t}, \quad \forall t \in [0, T]$$

où C est une constante à déterminer.

9/9

Exercice 2 Soit $T > 0$, $\varepsilon > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit

$$u(t, x) \in C^2([0, 1] \times [0, T])$$

la solution de l'équation d'onde suivante

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_{tt} - u_{xx} + t u_t = 0, & \text{pour } (x, t) \in]0, 1[\times]0, T[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & \text{pour } t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \varepsilon^\alpha \sin(\pi x) & \text{pour } x \in]0, 1[. \end{cases} \quad (**)$$

1. Donner la formulation variationnelle du problème ⁽²⁾ (**).
2. Est-ce que on peut prendre $u_t(t)$ comme fonction test dans la formulation ⁽²⁾ variationnelle.
3. On définit l'énergie de la solution de (**) par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \varepsilon^2 |u_t(t)|^2 + |u_x(t)|^2 dx, \quad t \geq 0,$$

Démontrer que le signe de $\frac{d}{dt} E(t)$ est négative. ⁽²⁾

4. Démontrer l'unicité de la solution. ⁽¹⁾
5. Pour quelle valeurs de α on a

$$E(t) \rightarrow 0, \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1)$$

A. SENGOUA.



Corrigé type

Evolution problems : Final Exam Correction.

Exercise I

Case I 1) $H_0^1(\Gamma_0, \Gamma) = \{u \in L^2(0,1), u' \in L^2(0,1), u(0)=u(1)=0\}$
 $= \overline{D(\Gamma_0, \Gamma)}.$

$\|u\|_{H_0^1(\Gamma_0, \Gamma)}^2 = \int_0^1 |u'(x)|^2 dx$

$(u, v)_{H_0^1(\Gamma_0, \Gamma)} = \int_0^1 u'(x) v'(x) dx$

2) $u(t) \in H_0^1(\Gamma_0, \Gamma), u_t(t) \in H^{-1}(\Gamma_0, \Gamma), u_t(t) \in L^2(0,1).$

Case II we multiply (*) by $v \in H_0^1(\Gamma_0, \Gamma)$ and integrate, we get

1) $\langle u_t, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} + \int_0^1 u_x v_x dx + \int_0^1 (2 + \sin(u)) u \cdot v dx = 0$

we have

$1 \leq 2 + \sin(u) \leq 3$

then $\int_0^1 (2 + \sin(u)) u \cdot u dx = \int_0^1 (2 + \sin(u)) u^2 dx$
 $\leq 3 \int_0^1 u^2 dx < +\infty, \text{ si } u \in L^2(0,1).$

2) taking $v = u(t)$ in the weak formulation, we get

$\langle u_t, u \rangle + \int_0^1 |u_x|^2 dx + \int_0^1 (2 + \sin(u)) u^2 dx = 0$

we have $\langle u_t, u \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^1 |u|^2 dx \right)$

$\int_0^1 u^2 dx \leq \int_0^1 (2 + \sin(u)) u^2 dx$

Then, $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^1 |u|^2 dx \right) + \int_0^1 |u_x|^2 dx \leq 0$

Multiplying by $2e^{2t}$, we have

$$e^{2t} \frac{d}{dt} \left(\int_0^1 u^2 dx \right) + \left(\int_0^1 u^2 dx \right) \frac{d}{dt} (e^{2t}) \leq 0.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(e^{2t} \int_0^1 u^2 dx \right) \leq 0.$$

3) integration on $[0, t]$, we get:

$$e^{2t} \int_0^1 u^2(x) dx - e^{2(0)} \int_0^1 |u(0)|^2 dx \leq 0.$$

$$\Rightarrow e^{2t} \int_0^1 u^2(x) dx \leq \int_0^1 |x\sqrt{1-x}|^2 dx = \int_0^1 x^2(1-x) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 u^2(x) dx \leq e^{-2t} \left(\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 \right) \\ \leq e^{-2t} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^{-2t}}{12}, \quad \boxed{C = \frac{1}{12}}$$

Exercise [2]

1) For the weak formulation, we multiply by $u \in H_0^1(\mathcal{I}_0, \mathcal{I})$,

we get

$$\varepsilon^2 \langle u_t, u \rangle + \int_0^1 u_x u_x dx + t \int_0^1 u_t u dx = 0$$

2) ~~Since~~ Since $u(t) \in C^2([0, 1]) \Rightarrow u_t(t) \in C^1([0, 1]) \subset H_0^1(\mathcal{I}_0, \mathcal{I})$

Moreover we have $u(0, t) = u(1, t) = 0$, $\forall t$,

$$\Rightarrow u_t(0, t) = u_t(1, t) = 0, \quad \forall t,$$

It follows that $u_t(t) \in H_0^1(\mathcal{I}_0, \mathcal{I})$ and we can take $u = u_t(t)$ in the weak formulation

$$3) \text{ we have } \varepsilon^2 \langle u_t, u_t \rangle + \int_0^1 u_x u_{xt} dx + t \int_0^1 u_t^2 dx = 0$$

$$\langle u_t, u_t \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^1 u_t^2 dx \right), \quad \int_0^1 u_x u_{xt} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^1 u_x^2 dx \right)$$

then $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^1 \varepsilon u_t^2 + u_x^2 dx \right) = -t \int_0^1 u_t^2 dx \leq 0.$

$\Rightarrow \frac{d}{dt} E(t) \leq 0.$

4) Integrating on $[0, t]$; we get $E(t) \leq E(0).$

let us suppose that we have two solns φ and ψ , then

$$\begin{cases} \varphi_t - \varphi_{xx} + t \varphi_t = 0 \\ \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0 \\ \varphi(x, 0) = 0 \\ \varphi_t(x, 0) = \varepsilon^\alpha \sin(\pi x) \end{cases} \quad (-) \quad \begin{cases} \psi_t - \psi_{xx} + t \psi_t = 0 \\ \psi(0, t) = \psi(1, t) = 0 \\ \psi(x, 0) = 0 \\ \psi_t(x, 0) = \varepsilon^\alpha \sin(\pi x) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (\varphi - \psi)_t - (\varphi - \psi)_{xx} + t(\varphi - \psi)_t = 0 \\ (\varphi - \psi)(0, t) = (\varphi - \psi)(1, t) = 0 \\ (\varphi - \psi)(x, 0) = 0 \\ (\varphi - \psi)_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

noting $w = \varphi - \psi$, we have

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} + t w_t = 0 \\ w(0, t) = w(1, t) = 0 \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

and from the previous question we have $E_w(t) \leq E_w(0)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 |w_t|^2 + |w_x|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 0^2 + 0^2 dx = 0.$$

$$\Rightarrow w_t(x, t) = w_x(x, t) = 0 \quad \text{for a.e } x, t \in [0, 1] \text{ and } t \in [0, T]$$

$\Rightarrow w(x, t) = \text{constant}$ in $[0, 1] \times [0, T]$ and this constant

is zero since $w(x, 0) = 0$ and $w(0, t) = w(1, t) = 0, \forall t \in [0, T].$

Finally $w=0 \Rightarrow \psi = \Psi$ and the solution is unique.

*) we have. $u(x,0)=0 \Rightarrow u_x(x,0)=0$, and $u_t(x,0)=\varepsilon^\alpha \sin(\pi x)$

$$\text{then } f(t) \leq F(0) = \frac{1}{2} \int_0^1 \varepsilon^2 |\varepsilon^\alpha \sin(\pi x)|^2 + 0^2 dx$$

$$\leq \frac{1}{2} \varepsilon^{2+2\alpha} \int_0^1 |\sin(\pi x)|^2 dx$$

$$\leq \frac{1}{2} \varepsilon^{2+2\alpha} \int_0^1 1 dx \quad (|\sin(\pi x)| \leq 1)$$

$$\text{we obtain } f(t) \leq \frac{1}{2} \varepsilon^{2(1+\alpha)}$$

and $f(t) \rightarrow 0$ as $\varepsilon \rightarrow 0$ iff $1+\alpha > 0$

i.e, if $\boxed{|\alpha| > -1}$.

A. SENGOUA
07.06.2022.