

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction seront prises en compte à la correction. Les résultats finaux devront être encadrés.

- Soit  $T > 0$ . Dans les exercices **2** et **3** on suppose que les solutions existent et qu'elles sont régulières, i.e. dans  $C^2([0, T]; H_0^1(]0, 1[))$ .
- On rappelle que la constante de Poincaré est  $\frac{1}{\pi}$  sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 1** a) Rappeler la définition de  $H^1(0, T; H_0^1(]0, 1[))$  et de sa norm.  
b) Rappeler l'inégalité de Poincaré sur  $H_0^1(]0, 1[)$ .

**Exercice 2** On considère l'équation de la chaleur suivante

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + f(t)y = 0, & \text{pour } (x, t) \in ]0, 1[ \times ]0, T[, \\ y(0, t) = y(1, t) = 0, & \text{pour } t \in ]0, T[, \\ y(x, 0) = \sin(\pi x), & \text{pour } x \in ]0, 1[, \end{cases} \quad (*)$$

où  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On définit l'énergie de la solution par

$$H(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 |y(t, x)|^2 dx.$$

1. Donner la formulation faible de (\*).
2. On suppose  $f(t) = t$ .
  - (a) Démontrer que  $\frac{d}{dt}H(t) \leq 0$  et déduire l'unicité de la solution.
  - (b) Démontrer que  $H(t) \leq H(0)e^{-t^2}$ , (Il faut calculer  $H(0)$ ).
3. On suppose maintenant  $f(t) = -t^2$ .  
Démontrer qu'il existe un instant  $T_1 > 0$  tel que  $\frac{d}{dt}H(t) \leq 0$  pour  $t \in [0, T_1]$ , (Il faut préciser la valeur de  $T_1$ ).
4. (Question Bonus) On suppose maintenant  $f(t) = -T_1^2$ . Résoudre (\*).

**Exercice 3** Soit  $\alpha > 0$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue satisfaisant

$$|g(z)| \leq \alpha |z|, \forall z \in \mathbb{R}.$$

On considère l'équation d'ondes suivante

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + g(u) = 0, & \text{pour } (x, t) \in ]0, 1[ \times ]0, T[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & \text{pour } t \in ]0, T[, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 1 & \text{pour } x \in ]0, 1[. \end{cases} \quad (**)$$

et on définit l'énergie de la solution de (\*\*) par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u_t(t, x)|^2 + |u_x(t, x)|^2 dx.$$

1. Donner la formulation faible de (\*).
2. Vérifier que tous les intégrales dans la formulation faible ont un sens.
3. Démontrer que  $E(t)$  satisfait

$$E(t) \leq \frac{1}{2} e^{\alpha T}, \quad \forall t \in [0, T].$$

4. Améliorer cette inégalité, i.e. remplacer  $e^{\alpha T}/2$  par une valeur plus petite.

Exercise (2). a)  $H'(0, T; H_0^1(\Gamma_0, \Gamma)) = \{u/u_x \in L^2(0, T; H_0^1(\Gamma_0, \Gamma)), u \in L^2(0, T; H_0^1(\Gamma_0, \Gamma))\}$

b)  $\|u\|_{L^2(0,1)} \leq C_p \|u_x\|_{L^2(0,1)} \quad C_p = 1/\pi$

Exercise (3) a) weak formulation : we take  $u \in H_0^1(\Gamma_0, \Gamma)$  as a test function. then integrate by parts.  $\eta_{xx} u$ , we obtain

$$\int_0^1 \eta_t u \, dx + \int_0^1 \eta_x u_x \, dx + f(t) \int_0^1 \eta u \, dx = 0, \quad \forall u \in H_0^1(\Gamma_0, \Gamma).$$

All these integrals have a sense (It suffices to use G-S inequality).

$$\begin{aligned} 2)(a) \quad \frac{d}{dt} H(t) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (|\eta|^2) \, dx = \int_0^1 \eta_t \eta \, dx \\ &= - \underbrace{\int_0^1 |\eta_x|^2 \, dx}_{\geq 0} - \underbrace{f(t) \int_0^1 \eta^2 \, dx}_{\geq 0}. \quad (\text{Using the equation}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} H(t) \leq 0.$$

For the uniqueness, suppose that (a) have two solutions  $u_1, u_2$  then  $w = u_1 - u_2$  solves (a) with  $H(0) = 0$  since we have the same I.C

$$\frac{d}{dt} H(t) \leq 0 \Rightarrow H(t) \leq H(0) = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

$$\text{v.e.} \quad \int_0^1 \eta_x^2 \, dx = 0 \Rightarrow \eta(t) = 0 \quad \text{p.p. } x \in [0, 1], \quad \forall t \in [0, T].$$

$$\text{Thus} \quad \eta(t, x) = 0, \quad \text{p.p. } (x, t) \in [0, 1] \times [0, T].$$

(b) we have :  $\frac{d}{dt} H(t) \leq -4t H(t)$ , multiply by  $e^{2t^2}$   $\left| H(0) = \frac{1}{4} \right.$

$$\frac{d}{ds} \left( H(s) e^{2s^2} \right) \leq 0 \Rightarrow \int_0^t \frac{d}{ds} \left( H(s) e^{2s^2} \right) \, ds \leq 0.$$

$$\Rightarrow H(t) e^{2t^2} \leq H(0) e^{2 \cdot 0} = \frac{1}{4} \Rightarrow H(t) \leq \frac{1}{4} e^{-2t^2}$$

and we have  $\left| \ell(t) \leq \frac{1}{4} e^{-t^2} \right|$ , since  $e^{-2t^2} \leq e^{-t^2}$ ,  $0 \leq t$ .

3) we have by Poincaré inequality:  $-\int_0^1 |y_x|^2 dx \leq -\pi^2 \int_0^1 |y|^2 dx$

then  $\frac{d}{dt} H(t) \leq -\pi^2 \int_0^1 |y|^2 dx + t^2 \int_0^1 |y|^2 dx$   
 $\leq -(\pi^2 - t^2) \int_0^1 |y|^2 dx$ .

If  $0 \leq t \leq \pi$  then  $\frac{d}{dt} H(t) \leq 0$ ,  $\boxed{T_1 = \pi}$ .

4) Question Bonus:  $y = \sin(x)$  solves  $y_t - y_{xx} - \pi^2 y = 0$  and satisfies the I.C and B.C.

Exercise (3) 1) weak formulation: we test by  $\varphi \in H_0^1(\Gamma_0; \mathbb{R})$  and integrate

by parts.  $u_{xx} u$ , we obtain:

$$\int_0^1 u_t u dx + \int_0^1 u_x u_x dx + \int_0^1 g(u) u dx = 0, \quad \forall u \in H_0^1(\Gamma_0; \mathbb{R}).$$

2) Since  $u \in C^2([0, T]; H_0^1(\Gamma_0; \mathbb{R}))$ . Then

$$u(t), u_t(t), u_x(t) \in H_0^1(\Gamma_0; \mathbb{R}), \quad u_x(t) \in L^2(0, 1)$$

$$\left| \int_0^1 u_t u dx \right| \leq \|u_t(t)\|_{L^2(0, 1)} \cdot \|u\|_{L^2(0, 1)} < +\infty,$$

$$\left| \int_0^1 u_x u_x dx \right| \leq \|u_x\|_{L^2(0, 1)} \cdot \|u_x\|_{L^2(0, 1)} < \infty, \quad u_x \in L^2(0, 1).$$

$$\left| \int_0^1 g(u) u dx \right| \leq \alpha \int_0^1 |u| |u| dx \leq \alpha \|u\|_{L^2(0, 1)} \cdot \|u\|_{L^2(0, 1)} < +\infty.$$

3) Taking  $u_t = \varphi$  in the weak formulation:

$$\int_0^1 u_t u + u_x u_x dx = - \int_0^1 g(u) u_t dx \leq \alpha \int_0^1 |u| |u_t| dx.$$

the first integral equals  $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |u_t|^2 + |u_x|^2 dx$

then,  $\frac{d}{dt} E(t) \leq \frac{\alpha}{2} \int_0^1 |u_t|^2 + |u|^2 dx \quad \left( ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \right)$

$$\leq \frac{\alpha}{2} \int_0^1 |u_t|^2 + \frac{1}{\pi^2} |u_x|^2 dx. \quad (\text{Poincaré})$$

$$\leq \frac{\alpha}{2} \int_0^1 |u_t|^2 + |u_x|^2 dx = \frac{\alpha}{2} E(t), \quad \frac{1}{\pi^2} < 1.$$

we have  $\frac{d}{dt} E(t) - \alpha E(t) \leq 0$ . Multiply by  $e^{-\alpha t}$ .

$$\frac{d}{dt} [E(t) e^{-\alpha t}] \leq 0, \quad \text{Integrate on } [0, t], \text{ we get}$$

$$E(t) e^{-\alpha t} \leq E(0) e^{-\alpha \cdot 0} = E(0) = \frac{1}{2}.$$

the  $E(t) \leq E(0) e^{\alpha t} = \frac{e^{\alpha t}}{2} \leq \frac{e^{\alpha T}}{2}, \quad 0 \leq t \leq T$

4) if we start by using  $ab = \left(\frac{a}{\sqrt{\pi}}\right) (\sqrt{\pi}b) \leq \left(\frac{a^2}{\pi} + \pi b^2\right)/2$

then we have  $\frac{d}{dt} E(t) \leq \alpha \int_0^1 |u_t| |u| dx$

$$\leq \frac{\alpha}{2} \int_0^1 \frac{|u_t|^2}{\pi} + \pi |u|^2 dx$$

$$\leq \frac{\alpha}{2} \int_0^1 \frac{|u_t|^2}{\pi} + \frac{\pi}{\pi^2} |u_x|^2 dx \quad (\text{Poincaré})$$

$$\leq \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 |u_t|^2 + |u_x|^2 dx = \frac{\alpha}{\pi} E(t).$$

the same argument used above gives  $\left(\frac{\alpha}{\pi} < \alpha\right)$ .

$$E(t) \leq \frac{e^{\frac{\alpha}{\pi} T}}{2}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Another solution for 4) in Exercise (3).

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq \frac{\alpha}{2} \int_0^1 |u_t| |u| \, dx.$$

$$\leq \alpha \left( \int_0^1 |u_t|^2 \, dx \right)^{1/2} \left( \int_0^1 |u|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{\alpha}{\pi} \left( \int_0^1 |u_t|^2 \, dx \right)^{1/2} \left( \int_0^1 |u_x|^2 \, dx \right)^{1/2} \quad (\text{Poincaré})$$

$$\leq \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 |u_t|^2 + |u_x|^2 \, dx = \frac{\alpha}{\pi} E(t).$$

and we obtain again  $E(t) \leq \frac{e^{\frac{\alpha}{\pi} t}}{2}$  for  $0 \leq t \leq T$ .

29.05.2021

A. SENGOUEN



□