

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction seront prises en compte à la correction. Les résultats finaux devront être encadrés.

Exercice 1 On suppose que $y(x, t)$ est la solution du problème à valeurs initiales

$$y_t + (\sin t) y_x + \frac{1}{1+t} y = 0, \quad y(x, 0) = y^0 \in L^2(\mathbb{R}), \quad c > 0, \quad (*)$$

telle que y et ses dérivées tendent vers 0 lorsque $|x| \rightarrow \infty$.

1. On note $f(t) = \|y(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$. Démontrer que f satisfait l'EDO suivante

$$f' + \frac{1}{1+t} f = 0.$$

2. Dédurre que

$$\|y(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = g(t) \|y^0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

où g est une fonction en t à déterminer.

3. Utiliser la Transformation de Fourier pour retrouver le dernier résultat.

Aide : Tester (*) par y .

1. Soit $T > 0$. On considère $u(t, x) \in C^2([0, T] \times \mathbb{R})$, la solution de l'équation suivante

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + \frac{2+x^2}{1+x^2} u = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \in \mathbb{R}, t \in (0, T), \\ u(t, x) \rightarrow 0, & \text{si } x \rightarrow \pm\infty, \forall t \in (0, T), \\ u(0, x) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (*)$$

où u_t et u_x note les dérivées en t et x .

2. Rappeler la définition de $H^1(\mathbb{R})$ et de sa norme.

3. Donner la formulation variationnelle du problème (*).

4. Démontrer que

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \frac{v}{\sqrt{1+x^2}} dx \right| \leq \sqrt{\pi} \|v\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}).$$

5. Vérifier que l'opérateur A définie par

$$v \mapsto A(v) = -v_{xx} + \left(\frac{2+x^2}{1+x^2} \right) v$$

est coercive sur $H^1(\mathbb{R})$, i.e. démontrer que

$$\int_{\mathbb{R}} A(v) v dx \geq \alpha \|v\|_{H^1(\mathbb{R})}^2, \quad \alpha \text{ est une constante à déterminer.}$$

6. Démontrer que

$$\int_{\mathbb{R}} A(v) w dx \leq 3 \|v\|_{H^1(\mathbb{R})} \|w\|_{H^1(\mathbb{R})}, \quad \forall v, w \in H^1(\mathbb{R}).$$

7. Démontrer que

$$\int_0^T \|v(s)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 ds \leq \pi T.$$

Aide: $2ab \leq a^2 + b^2$.

soluⁿ d'examen final de "Problèmes d'Évolution"

exercice (1).

$$y_t + (\sin t) y_x + y = 0, \quad y(t, 0) = y^0$$

1) Multiplying (*) by y and using $yy_t = \frac{1}{2}(y^2)_t$, $y_x y = \frac{1}{2}(y^2)_x$

we get
$$\frac{1}{2}(y^2)_t + \frac{\sin t}{2}(y^2)_x + y^2 = 0$$

Integrating with respect to x ,

$$\int_{\mathbb{R}} (y^2)_t dx = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} y^2 dx, \quad \int_{-x}^{+x} (y^2)_x = y^2 \Big|_{-x}^{+x} = 0.$$

we get
$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}} y^2 dx \right) + \frac{2}{1+t} \int_{\mathbb{R}} y^2 dx = 0, \text{ i.e. } f'(t) + \frac{2}{1+t} f(t) = 0.$$

2) solving this EDO, we get
$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{2}{1+t} \Rightarrow \ln \frac{f(t)}{c} = 2 \ln(1+t)$$

$$\Rightarrow f(t) = C_1 (1+t)^2$$

Evaluating at $t=0$, $\|y(x,0)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = C_1 (1+0)^2 \Rightarrow C_1 = \frac{\|y^0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2}{(1+0)^2}$

so
$$\boxed{\|y(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{\|y^0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2}{(1+t)^2}}$$

3) Taking the F.T of (*) we get
$$\hat{y}_t + i \sin t \frac{1}{2} \hat{y} + \frac{1}{1+t} \hat{y} = 0, \quad \hat{y}(0,0) = \hat{y}^0(\xi)$$

$$\hat{y}' + \left(\frac{1}{1+t} + i\varphi \sin t \right) \hat{y} = 0 \quad \hat{y} = C_2 e^{-\left(\ln(1+t) - i\varphi \cos t\right)}$$

$$\hat{y}^0(q) = C e^{fi\varphi} \Rightarrow C_2 = e^{-i\varphi} \hat{y}^0(q)$$

$$\text{so } \hat{y} = \hat{y}^0 \left(e^{-\ln(1+t) - i(\varphi - \varphi \cos t)} \right) \cdot e^{-\ln(1+t) - i(\varphi - \varphi \cos t)}$$

$$\text{then } \|\hat{y}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{y}(t)\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int |\hat{y}^0(q)|^2 e^{-2\ln(1+t)} e^{-2i(\varphi - \varphi \cos t)} dq$$

$$= \frac{e^{-2\ln(1+t)}}{2\pi} \|\hat{y}^0(q)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \quad \text{since } \int 1 = 1$$

$$= \frac{\|\hat{y}^0(q)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2}{2\pi(1+t)^2} = \frac{\|\hat{y}^0(x)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2}{(1+t^2)^2}$$

~~2. SUBJECT 2~~

Exercice 2. Soit $u(t, x) \in C^2([0, T] \times \mathbb{R})$ la solution de l'équation suivante

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + \frac{2+x^2}{1+x^2}u = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \in \mathbb{R}, t \in (0, T), T > 0, \\ u(t, x) \rightarrow 0, & \text{si } x \rightarrow \pm\infty, \forall t \in (0, T), \\ u(0, x) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (*)$$

- (1) Rappeler la définition de $H^1(\mathbb{R})$ et de sa norme.
 (2) Donne la formulation variationnelle du problème (*).
 (3) Démontrer que

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \frac{v}{\sqrt{1+x^2}} dx \right| \leq \sqrt{\pi} \|v\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}).$$

- (4) Vérifier que l'opérateur A définie par

$$v \mapsto A(v) = -v_{xx} + \left(\frac{2+x^2}{1+x^2} \right) v$$

est coercive sur $H^1(\mathbb{R})$.

- (5) Démontrer que

$$\int_{\mathbb{R}} A(v)w dx \leq 3 \|v\|_{H^1(\mathbb{R})} \|w\|_{H^1(\mathbb{R})}, \quad \forall v, w \in H^1(\mathbb{R}).$$

- (6) Démontrer que

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_1 \sqrt{T} \quad \text{et} \quad \int_0^T \|u_x(s)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 ds \leq C_2 T.$$

ou C_1 est C_2 sont des constantes indépendantes de t .

Aide: ~~$2ab \leq a^2 + b^2$~~ . ok.

Solution.

$$(1) \quad H^1(\mathbb{R}) = \{u \mid u, u_x \in L^2(\mathbb{R})\}, \quad \|u\|_{H^1(\mathbb{R})} = \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|u_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right)^{1/2}$$

(2) We multiply (*) by $u \in H^1(\mathbb{R})$, we obtain after integration

$$\int_{\mathbb{R}} u_t^2 dx - \int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2 u dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{2+x^2}{1+x^2} u u_x dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{u}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

observe that

$$- \int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2 u dx = - \left[u_x^2 u \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} u_x^2 u_x dx = \int_{\mathbb{R}} u_x^3 dx$$

Since $u \in H^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = 0$.

We obtain the weak formulation

$$\int_{\mathbb{R}} u_t u \, dx + \int_{\mathbb{R}} u_x u_x \, dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{2+x^2}{1+x^2} u u \, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{u \, dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R})$$

(3) By Cauchy-Schwarz inequality.

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \frac{u \, dx}{\sqrt{1+x^2}} \right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |u|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{\pi} \cdot \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

(arctan x from -∞ to ∞ = π)

(4) Coercivity of A, since $\inf_{x \in \mathbb{R}} \left(\frac{2+x^2}{1+x^2} \right) = 1$, then

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} A u u \, dx &= \int_{\mathbb{R}} |u_x|^2 + \frac{2+x^2}{1+x^2} |u|^2 \, dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}} |u_x|^2 + |u|^2 \, dx = \|u\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \quad \alpha = 1. \end{aligned}$$

(By C-S inequality)

$$\begin{aligned} (5) \quad \int_{\mathbb{R}} A(u) w \, dx &= \int_{\mathbb{R}} u_x w_x \, dx + \frac{2+x^2}{1+x^2} u w \, dx \\ &\leq \|u_x\|_{L^2(\mathbb{R})} \|w_x\|_{L^2(\mathbb{R})} + \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\frac{2+x^2}{1+x^2} \right) \|u\|_{L^2(0,1)} \|w\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq \|u_x\|_{L^2(\mathbb{R})} \|w_x\|_{L^2(\mathbb{R})} + 2 \|u\|_{L^2(0,1)} \|w\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq 3 \|u\|_{H^1(\mathbb{R})} \|w\|_{H^1(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

We have used Cauchy-Schwarz inequality and $\| \cdot \|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \| \cdot \|_{H^1(\mathbb{R})}$

(6) taking $u = u(t)$ in the weak formulation we get, using (3) and (4)

$$\int_{\mathbb{R}} u u_t \, dx + \int_{\mathbb{R}} |u_x|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{2+x^2}{1+x^2} |u|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{u \, dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} u u_t \, dx + \|u\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \leq \sqrt{\pi} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

observe that $\int_{\mathbb{R}} u u_t \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |u|^2 \, dx$

$$\text{and } \sqrt{\pi} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \quad \left(\text{by } ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \right)$$

$$\leq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \|u\|_{H^1(\mathbb{R})}^2$$

We have now

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2) + \frac{1}{2} \|u\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \leq \frac{\pi}{2}$$

Integrate on $(0, t)$, $t \leq T$, we get (multiply by 2)

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \cancel{\|u(0)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2}^{=0} + \int_0^t \|u(s)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 ds \leq \int_0^t \pi ds$$

$$\Rightarrow \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \int_0^t \|u(s)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 ds \leq \pi t \leq \pi T.$$

Taking the sup on $t \in [0, T]$, we get

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \pi T \Rightarrow \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \sqrt{\pi T}$$

$$\text{and } \int_0^T \|u(s)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 ds \leq \pi T$$

□