

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction seront prises en compte à la correction. Les résultats finaux devront être encadrés.

Exercice 1 On suppose que $y(x, t)$ est la solution du problème à valeurs initiales

$$y_t + cy_x + y = 0, \quad y(x, 0) = \varphi(x) \in L^2(\mathbb{R}), \quad c > 0, \quad (*)$$

telle que y et ses dérivées tendent vers 0 lorsque $|x| \rightarrow \infty$.

1. On note $f(t) = \|y(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$. Démontrer que f satisfait l'EDO suivante

$$f' + 2f = 0.$$

2. Dédurre que

$$\|y(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = e^{-2t} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

3. Utiliser la Transformation de Fourier pour retrouver le dernier résultat.

Aide : Tester (*) par y . Utiliser l'égalité de Parseval.

Exercice 2 Soit $T > 0, \beta \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Soit $u(t, x) \in C^2([0, 1] \times [0, T])$ la solution de l'équation d'onde suivante

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t \in (0, T), \\ u_x(0, t) - u_t(0, t) = 0 \text{ et } u_x(1, t) + u_t(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \frac{\varepsilon^{-\beta}}{1+x^2} & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (**)$$

où u_t et u_x note les dérivées en t et x .

1. Rappeler les définitions de $H^1(]0, 1[)$ et de sa norme.

2. Donner la formulation variationnelle du problème (**).

3. On définit l'énergie de la solution de (**) par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \varepsilon^2 |u_t(t)|^2 + |u_x(t)|^2 dx, \quad t \geq 0,$$

Démontrer que le signe de $\frac{d}{dt} E(t)$ est négative.

4. Démontrer l'unicité de la solution.

5. Démontrer que

$$E(0) \leq C\varepsilon^{2(1-\beta)}, \quad \text{pour } C \leq \frac{\pi}{8}.$$

6. Pour quelles condition sur β on peut avoir

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u_x(t)\|_{L^2(0,1)} \rightarrow 0, \quad \text{si } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Même question pour

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u_t(t)\|_{L^2(0,1)} \rightarrow 0, \quad \text{si } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Solution de l'examen final de Problèmes d'analyse

19.01.2018

Exercice 1)

$$y_t + cy_x + y = 0, \quad y(x, 0) = \varphi(x), \quad c > 0. \quad (*)$$

1) Multiplying (*) by y and then $uy_t = \frac{1}{2}(u^2)_t$, $y_x u = \frac{1}{2}(u^2)_x$, we get

$$\left(\frac{1}{2}u^2\right)_t + \frac{c}{2}(u^2)_x + u^2 = 0$$

Integrating with respect to x ,

$$\int_{\mathbb{R}} (u^2)_t dx = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u^2 dx, \quad \int_{-a}^{+a} (u^2)_x dx = u^2 \Big|_{-a}^{+a} = 0,$$

we get $\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}} u^2 dx \right) + c \int_{\mathbb{R}} u^2 dx = 0$ i.e. $\boxed{f'(t) + 2f(t) = 0.}$

2) Solving this EDO, we get $f(t) = \int_{\mathbb{R}} u^2 dx = C_1 e^{-2t}$

Evaluating at $t=0$, $C = \int_{\mathbb{R}} \varphi^2(x) dx$. Thus.

$$\boxed{\|y(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = e^{-2t} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2}$$

3) Taking the F.T of (*) we get $\hat{y}_t + ic\hat{y} + \hat{y} = 0$, $\hat{y}(x, 0) = \hat{\varphi}(x)$.

hence $\hat{y}_t + (1+ic)\hat{y} = 0 \Rightarrow \hat{y} = C_2 e^{-(1+ic)t} = \hat{\varphi}(x) e^{-(1+ic)t}$

thus.

$$\begin{aligned} \|y(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{y}(t)\|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |\hat{\varphi}(\xi) \cdot e^{-(1+ic)t}|^2 d\xi \\ &= \frac{e^{-2t}}{\sqrt{2\pi}} \int |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi, \quad \text{since } |e^{-(1+ic)t}|^2 = e^{-2t} \\ &= \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 e^{-2t}. \end{aligned}$$

Exercice 2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ et $f \in C([0, 1])$. Soit $u(t, x) \in C^2([0, T] \times [0, 1])$ la solution de l'équation d'onde suivante

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t \in (0, T), T > 0, \\ u_x(t, 1) - \alpha u_t(t, 1) = 0 \text{ and } u_x(t, 0) + \alpha u_t(t, 0) = 0, & t \in (0, T), \\ u(0, x) = 0, \quad u_t(0, x) = \sqrt{\varepsilon} f(x) & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (*)$$

(1) Rappeler la définition de $H_0^1([0, 1])$.

(2) Donne la formulation variationnelle du problème (*).

(3) On définit l'énergie de la solution de (*) par

$$E(t) = \varepsilon^2 \|u(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|u_x(t)\|_{L^2(0,1)}^2, \quad t \geq 0,$$

Démontrer que le signe de $\frac{d}{dt} E(t)$ est déterminé par le signe de α .

(4) Si $\alpha \leq 0$, démontrer l'unicité de la solution.

(5) Si $\alpha \leq 0$, démontrer $\sup_{t \in [0, t]} \|u_x(t)\|_{L^2(0,1)} \rightarrow 0$, si $\varepsilon \rightarrow 0$.

solution:

(1) $H_0^1([0, 1]) = \{v \mid v, v_x \in L^2(0, 1)\}$, $\|v\|_{H^1([0, 1])} = \left(\|v\|_{L^2(0, 1)}^2 + \|v_x\|_{L^2(0, 1)}^2 \right)^{1/2}$

(2) Multiplying the first equation in (*) by $v \in H_0^1([0, 1])$ and Integrating on $(0, 1)$, we get

$$\varepsilon^2 \int_0^1 v_{tt} v \, dx = \int_0^1 v_{xx} v \, dx = 0$$

Since $v \in H_0^1([0, 1])$, the boundary term vanishes, we integrate by parts

$$\begin{aligned} - \int_0^1 v_{xx} v \, dx &= - \left[v_x v \right]_0^1 + \int_0^1 v_x v_x \, dx \\ &= - v_x(t, 1) v(1) + v_x(t, 0) v(0) + \int_0^1 v_x^2 \, dx \end{aligned}$$

we get the weak formulation

$$\varepsilon^2 \int_0^1 v_{tt} v \, dx + \int_0^1 v_x^2 \, dx - v_x(t, 1) v(1) + v_x(t, 0) v(0) = 0 \quad \forall v \in H_0^1([0, 1])$$

(3) taking $\phi = u_t(t)$ in the weak formulae, we get

$$\frac{1}{2} \int_0^1 u_{tt} u_t dx + \int_0^1 u_x u_{xt} dx - u_x(t,1) u_t(t,1) + u_x(t,0) u_t(t,0) = 0$$

observe that

$$\int_0^1 u_{tt} u_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |u_t|^2 dx$$

$$\int_0^1 u_x u_{xt} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |u_x|^2 dx$$

Due to B.C.

$$-u_x(t,1) u_t(t,1) = + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_t(t,1)|^2$$

$$u_x(t,0) u_t(t,0) = + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_t(t,0)|^2$$

then we get

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_0^1 |u_t|^2 dx + \int_0^1 |u_x|^2 dx \right) + \frac{1}{2} \left(|u_t(t,1)|^2 + |u_t(t,0)|^2 \right) = 0$$

$$\text{i.e. } \frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t) = - \frac{1}{2} \left(|u_t(t,1)|^2 + |u_t(t,0)|^2 \right) \leq \begin{cases} \geq 0 & \text{if } \alpha \geq 0 \\ \leq 0 & \text{if } \alpha \leq 0. \end{cases}$$

(4) if $\alpha \leq 0$ then $\frac{d}{dt} E(t) \leq 0$, i.e. $E(t)$ is nondecreasing (décroissante).

this means that $E(t) \leq E(0)$, $\forall t \in [0, T]$.

To show uniqueness, suppose that we have two solutions u_1, u_2 then $w = u_1 - u_2$ satisfy (*) with zero initial data.

denoting $E_w(t)$ the energy of solution w , we get

$$E_w(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 |w_t(t)|^2 dx + \int_0^1 |w_x(t)|^2 dx \leq E_w(0) = 0$$

$$\Rightarrow \|w_t(t)\|_{L^2(0,1)} = 0 \text{ and } \|w_x(t)\|_{L^2(0,1)} = 0$$

this means that $w = 0$ a.e in $(0, T) \times (0, 1)$

Due to the boundary conditions and I.C. we get

$$w = 0 \text{ a.e in } (0, T) \times (0, 1)$$

and since w is supposed in $C^2([0, T] \times (0, 1))$ the

$$w \equiv 0 \text{ on } (0, T) \times (0, 1).$$

(5) we have
$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^1 0^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\varepsilon^{-\beta}}{1+x^2} \right)^2 dx$$

$$= \frac{\varepsilon^{2(1-\beta)}}{2} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

note that $\frac{1}{(1+x^2)^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$ and $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

then
$$E(0) \leq \frac{\pi \varepsilon^{2(1-\beta)}}{8}$$

we can also calculate $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \leq \frac{\pi}{4}$.

(6) Since $E(0) \geq E(H)$ then

$$\varepsilon \|u_\varepsilon(t)\|_{L^2(0,1)} + \|u_x(t)\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{\pi}{8} \varepsilon^{2(1-\beta)}$$

taking the sup on $t \in [0,1]$, we get

$$\sup \|u_x(t)\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{\pi}{8} \varepsilon^{2(1-\beta)}$$

which goes to 0 if $1-\beta > 0$, i.e. $\boxed{|\beta| < 1}$

we have also

$$\sup \|u_\varepsilon(t)\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{\pi}{8} \varepsilon^{2(1-\beta)-2} = \frac{\pi}{8} \varepsilon^{-\beta}$$

which goes to 0 if $\boxed{|\beta| < 0}$.