

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction seront prises en compte à la correction. Les résultats finaux devront être encadrés.

Exercice 1 On considère le problème d'évolution suivant

$$\begin{cases} \partial_t u - i \partial_{xx} u = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x). & \varphi \in \mathcal{S}. \end{cases}$$

1. Appliquer la T. F. pour résoudre le problème.

2. Démontrer que

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

3. Utiliser l'identité de Parseval pour démontrer

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Exercice 2 On considère le problème d'évolution suivante

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u + u^3 = 0, & (x, t) \in]0, 1[\times [0, +\infty[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & \forall t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), & \forall x \in]0, 1[\end{cases}$$

1. Donner une formulation faible de ce problème, en précisant les espaces de u et $\partial_t u$.

2. On note $P(t) = \|u(t)\|_{L^2(0,1)}^2$ et on veut obtenir de estimation de plus en plus fine pour $P(t)$.

(a) Démontrer que $P'(t) \leq 0$ et déduire que

$$P(t) \leq \|g\|_{L^2(0,1)}^2, \forall t > 0.$$

(b) En utilisant l'inégalité de Poincaré (La constante de Poincaré est $\frac{1}{\pi}$), démontrer que

$$P'(t) \leq -2\pi^2 P(t) - 2 \int_0^1 u^4(t) dx$$

et déduire que

$$P(t) \leq P(0) e^{-2\pi^2 t}.$$

(c) En utilisant l'inégalité de Hölder pour estimer $\int_0^1 u^4(t) dx$, démontrer que

$$P'(t) \leq -2\pi^2 P(t) - 2P^2(t) \quad (*)$$

et déduire que

$$P(t) \leq \left(\frac{\pi^2 P(0)}{\pi^2 + P(0)(1 - e^{-2\pi^2 t})} \right) e^{-2\pi^2 t}.$$

Aide: Avec le changement de variable $Z(t) = \frac{1}{P(t)}$, l'EDO (*) devient linéaire.

Examen Final de : Problèmes d'évolution.

Solution.

12.05.2015

Exercice 1

1/ taking the F.T of $u_t - i u_{xx} = 0$ we get $\hat{u}_t + i \xi^2 \hat{u} = 0$ which is an ODE in the t -variable. It follows that

$$\hat{u}(\xi, t) = C e^{-i \xi^2 t} \quad (*)$$

the initial condition implies $\hat{u}(\xi, 0) = \hat{\varphi}(\xi)$, thus $C = \hat{\varphi}(\xi) \in \mathcal{S}'$.

the solution in F.T image is:

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{\varphi}(\xi) e^{-i \xi^2 t}$$

knowing that $\mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi i t}} e^{-ix^2/4it}\right) = e^{-\xi^2 t}$

and the convolution theorem we get

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi i t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4it}} \varphi(y) dy.$$

2/ we have

$$|u(x, t)| \leq \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi i t}} \right| \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{-\frac{(x-y)^2}{4it}} \right| \cdot |\varphi(y)| dy$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left\| e^{-\frac{(x-y)^2}{4it}} \right\|_{L^\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(y)| dy$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

$$3/ \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \stackrel{\text{Plancherel}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|e^{-i \xi^2 t} \cdot \hat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\leq \frac{\|e^{-i \xi^2 t}\|_{L^\infty}}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\text{then } \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

exercice 2

on test par une fonction $u \in D(\Omega)$ et on intègre sur $(0,1)$, et en prenant en compte les conditions aux bords ~~et~~, on a :

$$\int_0^1 \partial_x u(t) u \, dx + \int_0^1 \partial_x u(t) \partial_x u \, dx + \int_0^1 u^3 u \, dx = 0$$

par Cauchy-Schwarz le deuxième intégrale a un sens si $\partial_x u(t) \partial_x u(t) \in L^2(0,1)$, ce qui implique u doit être dans $H_0^1(0,1)$ (with boundary condition)

de plus pour le 3^{ème} intégrale si $u = u$ on a $\int_0^1 u^4 \, dx$

$$\int_0^1 u^3 u \, dx \leq 2 \int_0^1 u^4 \, dx$$

donc on doit prendre $u(t) \in H_0^1(0,1) \cap L^4(0,1)$.

en particulier $u^3 \in L^{\frac{4}{3}}(0,1)$ puisque $\frac{4}{3} + \frac{4}{1} = 1$.

Comme $\Delta u \in H^{-2}(\Omega)$ alors $\partial_x u(t) = \Delta u - u^3 \in H^{-1}(\Omega) + L^{\frac{4}{3}}(\Omega)$.

et on a la formule faible suivante :

$$\langle u(t), u \rangle_V + (\partial_x u(t) \partial_x u)_{H^{-1}} + \int_0^1 u^3 u \, dx = 0 \quad \text{for a.e } t$$

where : $u(t) \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega) = V$

2/ a/ $P'(t) = \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2$, on teste l'équation par $u = u$ on a :

$$\langle \partial_x u, u \rangle + \|\partial_x u\|_{L^2}^2 + \int_0^1 u^4 \, dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2 = -\|\partial_x u\|_{L^2}^2 - \int_0^1 u^4 \, dx$$

$$\Rightarrow P'(t) = -2\|\partial_x u\|_{L^2}^2 - 2 \int_0^1 u^4 \, dx \leq 0$$

on intègre : $P(t) - P(0) \leq 0 \Rightarrow P(t) \leq P(0) = \|g\|_{L^2}^2$

b/ on a : $\|u\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\pi^2} \|\partial_x u\|_{L^2}^2 = 0 - \|\partial_x u\|_{L^2}^2 \leq -\pi^2 \|u\|_{L^2}^2$

$$\text{donc } P'(t) \leq -2\pi^2 P(t) - 2\|u\|_{L^4}^4 \leq -2\pi^2 P(t)$$

pour intégrer cette inéquation ordinaire multiplions par $e^{+2\pi^2 t}$ il vient

$$(P(t) e^{2\pi^2 t})' \leq 0.$$

$$\Rightarrow P(t) e^{2\pi^2 t} - P(0) e^{2\pi^2 t} \leq 0.$$

$$\Rightarrow P(t) \leq P(0) e^{-2\pi^2 t}.$$

c/ appliquer Hôlder. on:

$$\int_0^1 u^2 dx \leq \left(\int_0^1 1 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^1 u^4 dx \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 u^2 dx \leq \left(\int_0^1 u^4 dx \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow - \int_0^1 u^4 dx \leq - \left(\int_0^1 u^2 dx \right)^2 = - P(t)^2$$

Donc $P'(t) \leq -2\pi^2 P(t) - 2P^2(t)$

i.e $P'(t) + 2\pi^2 P(t) + 2P^2(t) \leq 0$

$$\frac{p'(t)}{p^2(t)} + \frac{2\pi^2}{p(t)} + 2 \leq 0.$$

$$\left(-\frac{1}{p(t)} \right)' + \frac{2\pi^2}{p(t)} + 2 \leq 0.$$

$$\left(-\frac{1}{p(t)} - \frac{1}{\pi^2} \right)' \leq 2\pi^2 \left(-\frac{1}{p(t)} - \frac{1}{\pi^2} \right) \leq 0.$$

$$\left[\left(-\frac{1}{p(t)} - \frac{1}{\pi^2} \right) e^{-2\pi^2 t} \right]' \leq 0.$$

$$\left(-\frac{1}{p(t)} - \frac{1}{\pi^2} \right) \leq \left(-\frac{1}{p(0)} - \frac{1}{\pi^2} \right) e^{2\pi^2 t}$$

$$\frac{1}{p(t)} + \frac{1}{\pi^2} \geq \left(\frac{1}{p(0)} + \frac{1}{\pi^2} \right) e^{2\pi^2 t}$$

$$\frac{1}{p(t)} + \frac{1}{\pi^2} \geq \left(\frac{1}{p(0)} + \frac{1}{\pi^2} \right) e^{2\pi^2 t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p(t)} \geq -\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{p(0)\pi^2} \left(\pi^2 + p(0) \right) e^{2\pi^2 t}.$$

$$\geq \frac{1}{p(0)\pi^2} e^{2\pi^2 t} \left[-p(0) e^{-2\pi^2 t} + \pi^2 + p(0) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p(t)} \geq \frac{e^{2\pi^2 t}}{p(0)\pi^2} \left(\pi^2 + p(0) (1 - e^{-2\pi^2 t}) \right)$$

$$\Rightarrow p(t) \leq \frac{\pi^2 p(0)}{(1 - e^{-2\pi^2 t})} e^{-2\pi^2 t}.$$