

Intitulé du Master : Informatique Décisionnelle et Optimisation

Semestre : S1

Intitulé de l'UE : UEM 3.1

Intitulé de la matière : PLA

Le 19/01/2025

Solution

Solution exercice 1

Variables

- x_1 : nombre d'unités du produit A fabriquées
- x_2 : nombre d'unités du produit B fabriquées

Fonction objectif

Maximiser :

$$Z = 40x_1 + 30x_2$$

Contraintes

1. $2x_1 + x_2 \leq 10$ (temps de travail)
2. $x_1 \geq 0$
3. $x_2 \geq 0$

Étape 1 : Formulation sous forme standard

Pour appliquer l'algorithme du simplexe, nous devons d'abord écrire le problème sous forme standard. Nous introduisons une variable d'écart e pour transformer l'inégalité en équation :

$$2x_1 + x_2 + e = 10$$

où $e \geq 0$.

Formulation complète

Maximiser :

$$Z=40x_1+30x_2+0e$$

Sous les contraintes :

$$2x_1+x_2+e=10$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$e \geq 0$$

Étape 2 : Tableau initial du simplexe

Nous construisons le tableau initial du simplexe :

Base	x ₁	x ₂	e	C	K
E	2	1	1	10	5
Z	40	30	0	0	

Étape 3 : Itérations de l'algorithme

Première itération

Recherche du pivot :

Choix de la variable entrante : Nous choisissons la variable avec le coefficient le plus grand dans la ligne Z, ici x_1 .

Calcul des rapports :

- Pour la première contrainte : $10/2=5$
- Le rapport minimum est donc **5**, ce qui signifie que la variable sortante est e .

Pivotement :

Nous effectuons le pivot sur l'élément (1,1).

Nouveau tableau après pivotement

Base	x1	x2	e	C	K
x1	1	0.5	0.5	5	10
Z	0	20	20	200	

Deuxième itération

Choix de la variable entrante : Maintenant, nous choisissons x_2 .

Calcul des rapports :

- Pour la première contrainte : $5/0.5=10$
- Le rapport minimum est **10**, donc la variable sortante est encore e.

Nouveau tableau après pivotement

Base	x1	x2	e	C	K
x2	0	1	-1	10	
Z	0	0	-20	400	

Étape finale : Solution optimale

Nous avons atteint une solution optimale lorsque tous les coefficients de la ligne Z sont non négatifs ou nul.

Solution finale

- **Produits fabriqués :**

- $x_1=0$ car il est hors base.
- $x_2=10$

- **Profit maximal :**

$$Z=40(0) + 30(10) = 0+300=300 \text{ unités monétaires.}$$

La solution optimale consiste à produire **0 unités du produit A** et **10 unités du produit B**, ce qui génère un profit total de **300 unités monétaires**

Solution Exercice 2 :

Identification des variables de décision :

- x_1 : nombre d'unités du produit A fabriquées (entier)
- x_2 : nombre d'unités du produit B fabriquées (entier)

Fonction objectif :

$$\text{Maximiser } Z = 50x_1 + 30x_2$$

Contraintes :

1. $2x_1 + x_2 \leq 8$ (temps de travail)
2. $x_1 \leq 3$ (limite de production pour le produit A)
3. $x_2 \leq 5$ (limite de production pour le produit B)
4. $x_1, x_2 \geq 0$ et entiers

Résolution avec l'algorithme Branch and Bound

Étape 1 : Relaxation du problème

D'abord, nous résolvons le problème sans les contraintes d'intégralité pour obtenir une solution relaxée.

Fonction objectif :

$$\text{Maximiser } Z = 50x_1 + 30x_2$$

Contraintes :

1. $2x_1 + x_2 \leq 8$ (temps de travail)
2. $x_1 \leq 3$ (limite de production pour le produit A)
3. $x_2 \leq 5$ (limite de production pour le produit B)
4. $x_1, x_2 \geq 0$

En utilisant la méthode du simplexe ou un solveur, ou la résolution graphique nous trouvons la solution optimale relaxée :

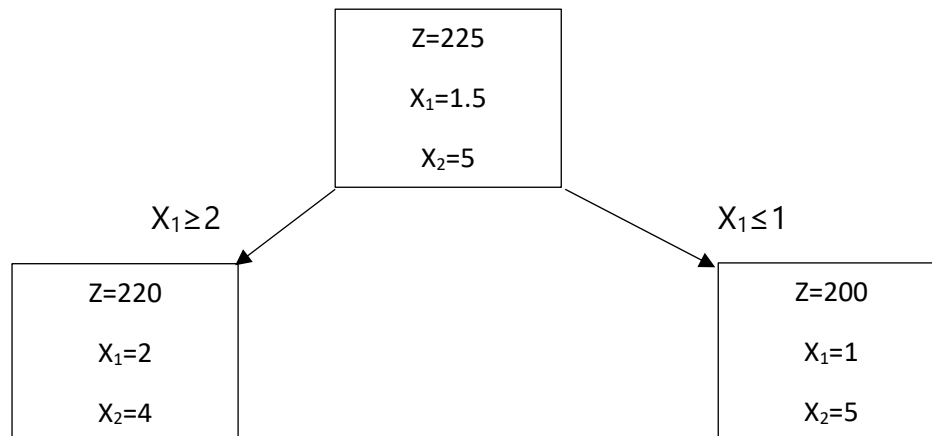
- $x_1 = 1.5$
- $x_2 = 5$

Profit maximum:

$$Z = 50(1.5) + 30(5) = 75 + 150 = 225$$

Étape 2: Branch and Bound

Nous allons utiliser la méthode branch and bound pour parcourir l'arbre des solutions possibles et identifier la plus optimale.



Conclusion

Les deux solutions obtenues sont entières, nous avons donc résolu notre problème. La solution optimale problème est :

- Produire **2** unités du produit A.
- Produire **4** unités du produit B.
- Profit maximal : **220** unités monétaires.

Solution Exercice 3 :

Soit le programme linéaire :

Maximiser $Z = 100x_1 + 40x_2$ sous contraintes :

- $4x_1 + 2x_2 \leq 60$ (menuiserie)
- $2x_1 + x_2 \leq 30$ (finition)
- $x_1, x_2 \geq 0$

où x_1 = nombre de tables et x_2 = nombre de chaises

Construction du dual :

Pour construire le dual, nous allons :

Transformer le max en min

Transposer la matrice des contraintes

Transformer les inégalités en leurs opposées

Soit y_1 et y_2 les variables duales associées aux contraintes de ressources.

Le dual devient :

Minimiser $W = 60y_1 + 30y_2$ sous contraintes :

$$4y_1 + 2y_2 \geq 100 \text{ (tables)}$$

$$2y_1 + y_2 \geq 40 \text{ (chaises)}$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$