

Correction d'examen statistique décisionnelle

Exercice 0.1. (5 points) Nous sommes dans le cas où la loi de probabilité du taux d'activité n'est pas connue. Nous utilisons donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff :

$$n = \frac{p \cdot q}{\varepsilon^2 \cdot \alpha} \quad \text{--- (1)}$$

avec :

$$p = 0,25, \quad q = 0,75, \quad \varepsilon = 1\% \quad \text{et} \quad \alpha = 5\%.$$

Ce qui donne :

$$n = 37\,500. \quad \text{--- (1)}$$

Exercice 0.2. (5 points)

1. Échantillons exhaustifs et non exhaustifs possibles de taille 2 :

- Échantillons exhaustifs : Avec répétition.

$$\{(2, 2), (2, 3), (2, 6), (3, 2), (3, 3), (3, 6), (6, 2), (6, 3), (6, 6)\} \quad \text{--- (1)}$$

- Échantillons non exhaustifs : Sans répétition.

$$\{(2, 3), (2, 6), (3, 6)\} \quad \text{--- (1)}$$

2. Distribution d'échantillonnage des moyennes :

- Moyennes pour les échantillons exhaustifs :

$$\{2, 2.5, 4, 2.5, 3, 4.5, 4, 4.5, 6\} \quad \text{--- (0,5)}$$

- Moyenne de la population :

$$\mu = \frac{2 + 2.5 + 4 + 2.5 + 3 + 4.5 + 4 + 4.5 + 6}{9} = 3.67$$

- Moyennes pour les échantillons non exhaustifs :

$$\{2.5, 4, 4.5\} \quad \text{--- (0,5)}$$

- Moyenne de la population :

$$\mu = \frac{2.5 + 4 + 4.5}{3} = 3.67 \quad \text{--- (0,5)}$$

3. Distribution d'échantillonnage des variances :

- Variances pour les échantillons exhaustifs :

$$\{0, 0.25, 4, 0.25, 0, 2.25, 4, 2.5, 0\} \quad \text{--- (0,5)}$$

- Variance de la population :

$$\sigma^2 = E(V(X)) \cdot \frac{n}{n-1} = 2,94 \quad \text{--- (0,5)}$$

- Variances pour les échantillons non exhaustifs :

$$\{0.25, 4, 2.25\} \quad \text{--- (0,5)}$$

• Variance de la population :

$$\sigma^2 = E(V(X)) \cdot \frac{N-1}{N} \cdot \frac{n}{n-1} = 2,77$$

Exercice 0.3. (5 points) On cherche à construire un estimateur de la proportion p .

****Vraisemblance**** : On a:

$$L_i(x_i, p) = \begin{cases} 1-p, & \text{si } x = 0; \\ p, & \text{si } x = 1. \end{cases} \quad (1)$$

La fonction de vraisemblance pour un échantillon de taille n est :

$$L(x, p) = \prod_{i=1}^n L_i(x_i, p) = p^k (1-p)^{n-k} \quad (1)$$

où

$$k = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial p} = kp^{k-1}(1-p)^{n-k} - p^k(n-k)(1-p)^{n-k-1} = 0 \quad (1)$$

alors

$$p^k(1-p)^{n-k} \left(\frac{k}{p} - \frac{n-k}{1-p} \right) = 0$$

On en déduit

$$\left(\frac{k}{p} - \frac{n-k}{1-p} \right) = 0 \quad (1)$$

C'est à dire

$$p = \frac{k}{n} \quad (1)$$

Exercice 0.4. (5 points) 1. ****Estimation ponctuelle du chiffre d'affaires moyen****

****Moyenne****

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot c_i}{\sum f_i} \quad (1)$$

Où c_i est le centre de chaque classe.

$$c = \{1, 2.5, 3.5, 4.5, 6\} \quad (1)$$

$$\bar{x} = \frac{10 \cdot 1 + 12 \cdot 2.5 + 14 \cdot 3.5 + 17 \cdot 4.5 + 7 \cdot 6}{10 + 12 + 14 + 17 + 7} = 3.55 \quad (1)$$

2. ****Estimation de l'écart-type****

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n}{n-1} \frac{\sum f_i \cdot (c_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}} \quad (\text{À calculer.}) \quad (1)$$

3. ****Proportion d'entreprises avec chiffre d'affaires ; 3 millions****

$$P = \frac{10 + 12}{60} \times 100 = 36.67\% \quad (1)$$