

LOI DE PROBABILITE DE LA VARIANCE D'ECHANTILLON

GASMI Abdelkader

December 16, 2024

POSITION DU PROBLEME

De la même manière que pour la moyenne, chacun des échantillons possède une variance :

$$v(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$v(x') = \frac{\sum_{i=1}^n (x'_i - \bar{x}')^2}{n}$$

$$v(x'') = \frac{\sum_{i=1}^n (x''_i - \bar{x}'')^2}{n}$$

Ces variances peuvent être considérées comme des valeurs observées d'une même variable aléatoire :

$$V(X) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

On peut considérer la suite des premières observations $x_1, x'_1, x''_1, \dots$ des différents échantillons. Comme $X_1, X_2, \dots, X_n$, la variable aléatoire $V(X)$ possède une distribution de probabilité, dite distribution d'échantillonnage de la variance. On peut donc calculer l'espérance mathématique et la variance de cette distribution, en supposant que l'échantillon est aléatoire et simple, les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ ont toutes la même distribution de probabilité, dont la moyenne est désignée par m et la variance par σ^2 .

$$E(X_i) = m \quad \text{et} \quad V(X_i) = \sigma^2$$

On peut démontrer alors :

$$E(V(X)) = \sigma^2 \frac{n}{n-1}$$

Pour la variance de la distribution d'échantillonnage de la variance, on démontre, dans le cas d'une population normale :

$$V(V(X)) = \frac{2(n-1)}{n^2} \sigma^4$$

Dans le cas d'une population finie d'effectif N , au sein de laquelle est prélevé, sans remise, un échantillon aléatoire simple d'effectif n , l'espérance mathématique de la variance est :

$$E(V(X)) = \frac{N}{N-1} \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

En ce qui concerne la forme de la distribution d'échantillonnage de la variance, on peut démontrer que dans le cas particulier d'une population normale, la variable aléatoire

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$$

possède une distribution χ^2 à $(n-1)$ degrés de liberté.

Exemple

Une population est constituée des cinq nombres 2, 3, 6, 8, 11. On considère tous les échantillons non exhaustifs possibles de taille deux de cette population. Trouver :

- 1. La moyenne de la population.*
- 2. L'écart type de la population.*
- 3. La moyenne de la distribution d'échantillonnage des variances.*
- 4. L'écart type de la distribution d'échantillonnage des variances.*
- 5. Trouver la moyenne de la distribution d'échantillonnage des variances dans le cas d'un échantillon exhaustif.*