

Modélisation mathématique d'un problème linéaire : forme générale

□ **Fonction objectif (économique) :**

$$\max (\text{ou } \min) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

Les x_i sont des variables qui influencent la valeur de z et les c_i les poids respectifs de ces variables modélisant l'importance relative de chacune de ces variables dans la fonction économique

□ **Contraintes :**

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \quad \{\leq, =, \geq\} \quad b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \quad \{\leq, =, \geq\} \quad b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \quad \{\leq, =, \geq\} \quad b_m \end{array}$$

□ **Contraintes de non négativité :** $x_j \geq 0, \quad \forall j = 1, 2, \cdots, n$

Avec, x_j : variables de décision (inconnues)
 a_{ij}, b_i, c_j : paramètres du programme linéaire (connues)

Exercice 1 :

Une entreprise s'adonne à la production de tables et de chaises. Le coût de production de chaque table est de 30 DA et celui de chaque chaise est de 20 DA. Le marché de vente peut absorber une production d'au plus 3 tables et 4 chaises par jour. De plus le nombre total de tables et de chaises vendues ne peut excéder 5 unités par jour. Une fois que l'assemblage est complété, chaque table requiert 2 heures de séchage et chaque chaise requiert 1 heure de séchage pour permettre à la colle de se fixer. L'appartement où se fait le séchage ne peut contenir qu'une seule unité à la fois. Pour des raisons économiques on exige que l'appartement où on fait le séchage soit utilisé au moins 5 heures par jour. Aussi, l'emballage d'une table requiert 2 opérations et celui d'une chaise, 4 opérations sur une machine. Pour des raisons économiques on exige également que le nombre d'opérations exécutées sur cette machine soit au moins égal à 8 par jour.

- Formuler sous forme d'un programme linéaire le problème de déterminer le nombre de tables et de chaises à produire par jour pour minimiser le coût total.

Exercice 2 :

Une usine de ciment produit deux types, le ciment C1 et le ciment C2.

La vente d'une tonne de C1 lui donne un bénéfice de 400 DA et une tonne de C2 un bénéfice de 500 DA.

La production est réalisée sur deux machines M1 et M2. M1 est disponible 6 heures par jours et M2 est disponible 8 heures par jours.

La production d'une tonne de C1 nécessite 40 minutes sur M1 et 20 minutes sur M2.

La production d'une tonne de C2 nécessite 30 minutes sur M1 et 30 minutes sur M2.

Quelles quantités de ciment C1 et C2 doit-on produire pour maximiser le bénéfice de l'usine ?

Donner le programme linéaire

Transformer le programme en programme standard.

Exemple 3 :

La société IRIS fabrique deux produits A et B. Pour fabriquer ces deux produits, elle dispose d'une seule machine M.

Pour fabriquer le produit A, il faut 2h de la machine M.

Pour fabriquer le produit B, il faut 3h de la machine M.

Cette machine ne peut pas tourner plus de 100 heures par mois.

Admettons que :

- le produit A dégage un bénéfice de 10 DA.
- le produit B dégage un bénéfice de 18 DA.

Question: parmi les programmes de production possible, quel est celui qui maximise le bénéfice ? dit autrement quel est le programme optimal qui maximise le bénéfice.

- **Exemple 4 :**

- La société SOCHITAB fabrique deux produits A et B. Pour fabriquer ces deux produits, elle dispose d'une seule machine N.
- Pour fabriquer le produit A, il faut 1h de la machine N.
- Pour fabriquer le produit B, il faut 2h de la machine N.
- Admettons que :
 - le produit A dégage un bénéfice de 8 DA.
 - le produit B dégage un bénéfice de 9 DA.
 - Cette machine ne peut pas tourner plus de 150 heures par mois.
 - Par ailleurs, il faut noter que le marché ne peut absorber plus de 30 produits de A par mois.
- **Question:** parmi les programmes de production possible, quel est celui qui maximise le bénéfice ?

EXERCICE 5 : (Problème d'agriculture) Un agriculteur veut allouer 150 hectares de surface irrigable entre culture de tomates et celles de piments. Il dispose de 480 heures de main d'œuvre et de 440 m³ d'eau. Un hectare de tomates demande 1 heure de main d'œuvre, 4 m³ d'eau et donne un bénéfice net de 1 million de dinars. Un hectare de piments demande 4 heures de main d'œuvre, 2 m³ d'eau et donne un bénéfice net de 2 millions de dinars.

Le bureau du périmètre irrigué veut protéger le prix des tomates et ne lui permet pas de cultiver plus de 90 hectares de tomates.

Question : Quelle est la meilleure allocation de ses ressources ?

Dualité

Soit le programme linéaire Primal suivant:

$$P \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = c x \\ \text{S C } \quad A x \geq b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right.$$

Son Dual est le suivant :

$$D \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } v = w b \\ \text{S C } \quad w A \leq c \\ \quad \quad w \geq 0 \end{array} \right.$$

Où w sont les variables du dual:

Passage du primal au dual

min	max
primal	dual
dual	primal
variable ≥ 0	contrainte $\leq$
variable ≤ 0	contrainte $=$
variable ≤ 0	contrainte $\geq$
contrainte $\leq$	variable ≤ 0
contrainte $=$	variable ≤ 0
contrainte $\geq$	variable ≥ 0

- Exercice n° 1 :**
 Construire le dual du problème primal suivant:
- Min $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$
 - Sujet à $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$
 - $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$.

- Exercice n° 2 :**
 Construire le dual du problème primal suivant:
- Maximiser $Z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4$
- Sous les contraintes :

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 8$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 7$$

$$x_1; x_2; x_3; x_4 \geq 0$$

min	max
primal	dual
dual	primal
variable ≥ 0	contrainte $\leq$
variable ≤ 0	contrainte $=$
variable ≤ 0	contrainte $\geq$
contrainte $\leq$	variable ≤ 0
contrainte $=$	variable ≤ 0
contrainte $\geq$	variable ≥ 0