



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématique et de l'Informatique
Département d'Informatique

Master : Informatique Décisionnelle et Optimisation

Programmation linéaire avancée

Intitulé du Master : Informatique Décisionnelle et Optimisation
Semestre :S1

Intitulé de l'UE : UEM 1.1

Intitulé de la matière : Programmation linéaire avancée

Crédits : 5

Coefficients : 1

Objectifs de l'enseignement

L'objectif de cette matière est d'enseigner les notions nécessaires pour la programmation linéaire et ses applications et de consolider cet enseignement par la programmation en nombres entiers.

Contenu de la matière :

- L'algorithme du simplexe et son implémentation.
- Dualité.
- La programmation linéaire en nombres entiers.
- Le problème de transport,
- Le problème d'affectation.

Mode d'évaluation :

- Examens de moyenne durée, TP, Mini-projet

Références :

- Henry Labordière, Cours de recherche opérationnelle, Editions Presses Ponts et chaussées, 1995.
- J-M Boussard, J-J Daudin, La programmation linéaire dans les modèles de production, MASSON, 2008.
- P. E. Gill, W. Murray, and M. H. Wright. Practical Optimization. Academic Press Inc, London, 1981.
- J. Nocedal and S. J. Wright. Numerical Optimization. Springer-Verlag, New York, 1999.
- G. B. Dantzig and M. N. Thapa. Linear Programming, volume I : Introduction. Springer- Verlag, New York, 1997.
- R. Fletcher. Practical Methods of Optimization. J. Wiley and Sons, Chichester, England, second edition, 1987.

Motivation et objectif du cours

Introduction à la programmation linéaire

Un outil qui permet de :

- modéliser
- résoudre

toute une classe de problèmes d'optimisation.
Existence de solveurs efficace pour la PL

Terminologie

- Recherche Opérationnelle
- Méthodes quantitatives de gestion
- Mathématiques de la Gestion
- Aide à la Décision

Historique (1)

La programmation linéaire fût développée au cours de la Seconde Guerre mondiale.

- L'objectif était d'allouer plus intelligemment les ressources de l'armée.
- Le terme « programmation » est employé avec le sens de « plan ».

La PL peut résoudre un VASTE nombre de problèmes (modèle de transport, allocation de ressources, théorie des jeux, tarifications, etc.)

Le développement de la théorie et des algorithmes est une des avancées scientifiques importantes du 20^e siècle, avec l'accélération des ordinateurs, la vitesse de résolution est améliorée par un facteur de 1 milliard en 15 ans...

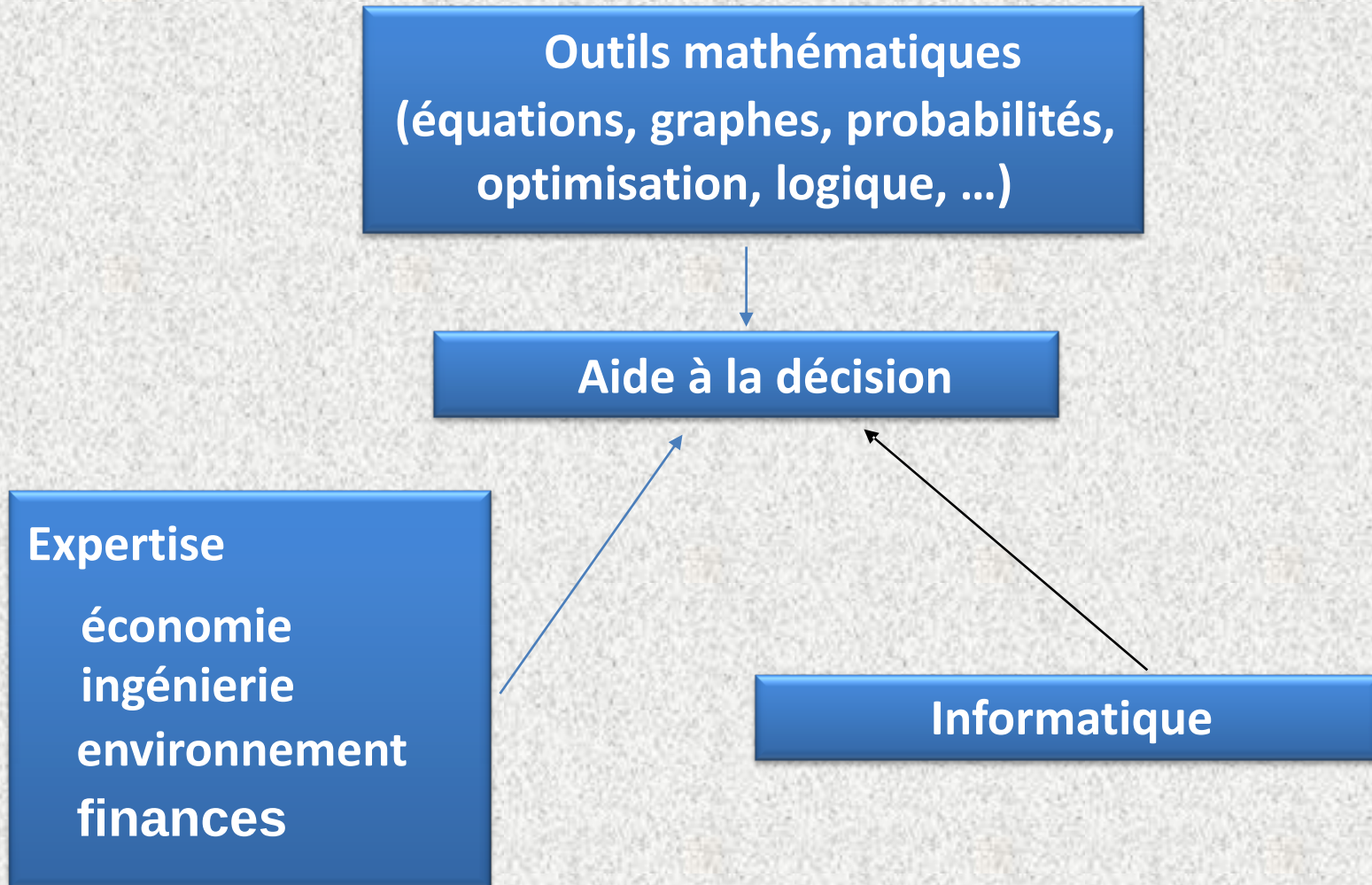
Impact majeur :

- économique : des centaines de millions de \$ dans l'industrie aérienne
- santé : traitement en radiothérapie

Historique (2)

- Crise (1970 - 1980)
 - Outils accessibles aux grandes entreprises seulement
 - Modèles trop simples pour une réalité de plus en plus complexe

Positionnement



Exemples de problèmes (1)

- Gérer un stock (de matières premières, de pièces de rechange, de déchets, ...)
- Planifier des tâches (gestion de grands projets, organisation d'un atelier, d'une administration, d'un de véhicules, de personnes)
- Localiser (un entrepôt, une décharge, une usine, un carrefour, un tracé de route, un incinérateur, ...)

Exemples de problèmes (2)

- Contrôler la fiabilité d'un processus (gestion de pannes)
- Gérer la production (de ressources, d'une entreprise, ...)
- Organiser la circulation ou le transport (d'informations, de fluides, de biens consommables, de véhicules, de personnes)

Principaux outils

- Programmation mathématique
- Méthodes combinatoires et graphes
- Aide multicritère à la décision
- Processus dynamiques
- Simulation
- ...

Problème de production

Un fabricant produit 2 types de yaourts à la fraise A et B à partir de Fraise, de Lait et de Sucre. Chaque yaourt doit respecter les proportions suivantes de matières premières:

	A	B
Fraise	2	1
Lait	1	2
Sucre	0	1

On dispose de 800 Kg de Fraises, 700 Kg de Lait et 300 Kg de sucre. La vente de 1 Kg de yaourts A et B rapporte respectivement 400 DA et 500 DA.

Le fabricant cherchant à maximiser son profit, quelle est la meilleure combinaison de production ?

Modélisation

- Sur quelles quantités peut-on travailler ?
- Que cherche-t-on à optimiser ?
- Quelles sont les contraintes du problème ?

Modélisation

- Sur quelles quantités peut-on travailler ?
 - Les seules valeurs non constantes sont : les quantités de yaourts A et B produites
 - On parle de **variables**
 - On les notera x_A et x_B
- Que cherche-t-on à optimiser ?
- Quelles sont les contraintes du problème ?

Modélisation

- Sur quelles quantités peut-on travailler ?
 - Variables : x_A et x_B
- Que cherche-t-on à optimiser ?
 - Le profit z
Calculé à partir de x_A et x_B
 - On parle de **fonction objectif**

$$z = 400x_A + 500x_B$$

- Quelles sont les contraintes du problème ?

Modélisation

- Quelles sont les contraintes du problème ? (1)
 - Première contrainte : 800 Kg de fraises disponibles
 - la quantité utilisée dépend de la production : $2x_A + x_B$
 - $2x_A + x_B \leq 800$

Modélisation

- Quelles sont les contraintes du problème ? (2)
 - Deuxième contrainte : 700 Kg de lait disponibles
 - la quantité utilisée dépend de la production : $x_A + 2x_B$
 - $x_A + 2x_B \leq 700$

Modélisation

- Quelles sont les contraintes du problème ? (3)
 - Deuxième contrainte : 300 Kg de sucre disponibles
 - la quantité utilisée dépend de la production : x_B
 - $x_B \leq 300$

Modélisation

- Sur quelles quantités peut-on travailler ?

- Variables : x_A et x_B

- Que cherche-t-on à optimiser ?

$$\text{Max } z = 400x_A + 500x_B$$

- Quelles sont les contraintes du problème ?

- $2x_A + x_B \leq 800$ (fraise)
 - $x_A + 2x_B \leq 700$ (lait)
 - $x_B \leq 300$ (sucre)
 - $x_A, x_B \geq 0$ (positivité)

Programme Linéaire

$$\max 400x_A + 500x_B$$

$$2x_A + x_B \leq 800$$

$$x_A + 2x_B \leq 700$$

$$x_B \leq 300$$

$$x_A, x_B \geq 0$$

Problème de transport

Usines ($i \in I$)	Alger	Constantine	Oran
Productions (p_i)	25	15	20

Clients ($j \in J$)	Sétif	Jijel	Batna	Chlef
Demandes (d_j)	20	12	9	14

Prix/unité ($c_{i,j}$)	Sétif	Jijel	Batna	Chlef
Alger	26	19	0	4
Constantine	12	2	20	24
Oran	19	30	24	28

Modélisation

- Variables :

$x_{i,j}$: quantité transportée de i à j

Modélisation

- Variables :

$x_{i,j}$: quantité transportée de i à j

- Objectif :

Minimiser $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{i,j} x_{i,j}$

Modélisation

- Variables :

$x_{i,j}$: quantité transportée de i à j

- Objectif :

Minimiser $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{i,j} x_{i,j}$

- Contraintes :

$\sum_{j \in J} x_{i,j} \leq \sum_i$, $\forall i \in I$ (Capacité de production)

$\sum_{i \in I} x_{i,j} = d_j$, $\forall j \in J$ (Demandes à satisfaire)

$x_{i,j} \geq 0$, $\forall i \in I, j \in J$

- La programmation linéaire s'inscrit dans le domaine de la recherche opérationnel, qui consiste à la résolution de problèmes complexes visant à obtenir le meilleur résultats possible en tenant compte de certaines contraintes.
- Objectif de la « RO » : faire de la recherche scientifique « opérationnelle » – utilisable sur « le terrain des opérations » – à l'aide des outils de l'informatique.
- Mettre au point des méthodes, les implémenter au sein d'outils (logiciels) pour trouver des résultats ensuite confrontés à la réalité (et repris jusqu'à satisfaction du demandeur).

Modélisation

Modéliser un problème en R.O consiste à identifier :

- Les variables (inconnues)
- Les contraintes
- L'objectif à atteindre (optimisation)

Dans un problème de programmation linéaire, les contraintes et l'objectif sont des fonctions linéaires des variables.

La méthode du Simplex

Les simplexes

En géométrie, un simplex ou simplexe est une généralisation de la notion de triangle ou de tétraèdre à des dimensions arbitraires. Plus précisément, un k -simplex est un polytope k -dimensionnel qui est la coque convexe de ses sommets $k + 1$.

Plus formellement, supposons que les $k + 1$ points :

$$u_0, \dots, u_k \in \mathbb{R}^k$$

sont affinements indépendants, ce qui signifie

$$u_1 - u_0, \dots, u_k - u_0$$

sont linéairement indépendants. Ensuite, le simplex déterminé par eux est l'ensemble des points :

$$C = \left\{ \theta_0 u_0 + \cdots + \theta_k u_k \mid \sum_{i=0}^k \theta_i = 1 \text{ and } \theta_i \geq 0 \text{ for all } i \right\}.$$

Par exemple, un 2-simplex est un triangle, un 3-simplex est un tétraèdre et un 4-simplex est un 5-cell. Un seul point peut être considéré comme un 0-simplex, et un segment de ligne peut être considéré comme un 1-simplex. Un simplex peut être défini comme le plus petit ensemble convexe contenant les sommets donnés.



Un 3-simplex ou un tétraèdre régulier

La méthode du Simplex dans la programmation linéaire

En optimisation mathématique, l'algorithme simplex du mathématicien Américain George Bernard Dantzig (ou méthode simplex) introduit à partir de 1947, est un algorithme populaire pour la programmation linéaire.



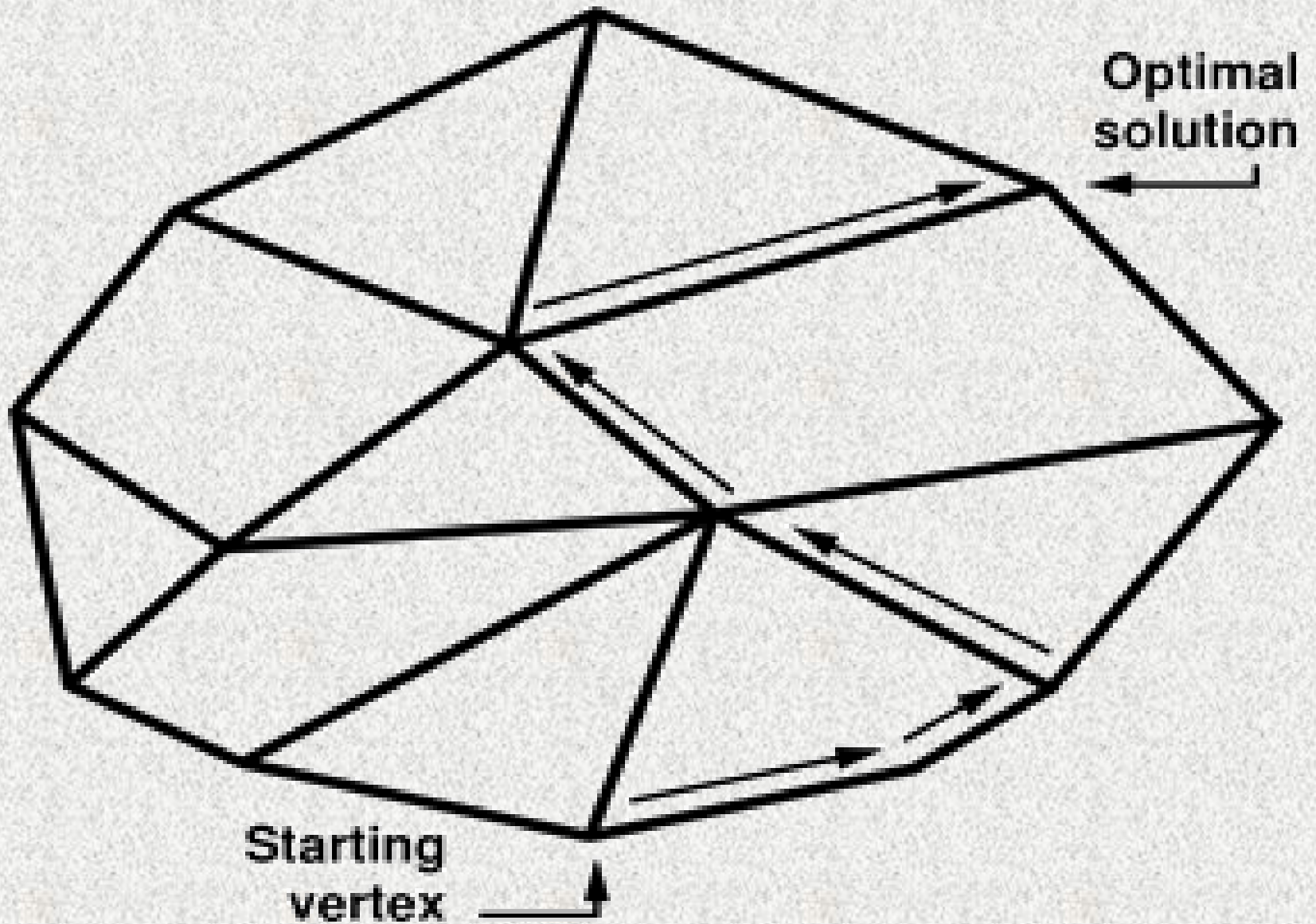
Né le 8 novembre 1914,
[Portland, Oregon, États-Unis](#)

Décédé le 13 mai 2005,
[Stanford, Californie, États-Unis](#)

La méthode du simplexe va permettre de résoudre des problèmes d'optimisation en modélisant les objectifs et les contraintes sous forme d'équations ou d'inéquations.

La programmation linéaire (également appelée optimisation linéaire) est une méthode permettant d'obtenir les meilleurs résultats (tels que le profit maximum ou le coût le plus bas) dans un modèle mathématique dont les besoins sont représentés par des relations linéaires. La programmation linéaire est un cas particulier de programmation mathématique (optimisation mathématique).

Les différentes solutions peuvent être vue comme des sommets qui sont liés entre eux :



Donc la méthode du simplex consiste à partir d'un sommet, puis à se déplacer vers un sommet adjacent si la valeur de la fonction économique est plus intéressante. A partir du moment où aucun déplacement n'est possible, on considère être arrivé sur le sommet optimal. Dans la méthode du simplex, il y aura des variables de décision :

x , un nombre entier positif

y , un nombre entier positif

Et, il y aura une fonction économique qui consistera à être maximiser pour maximiser le chiffre d'affaires :

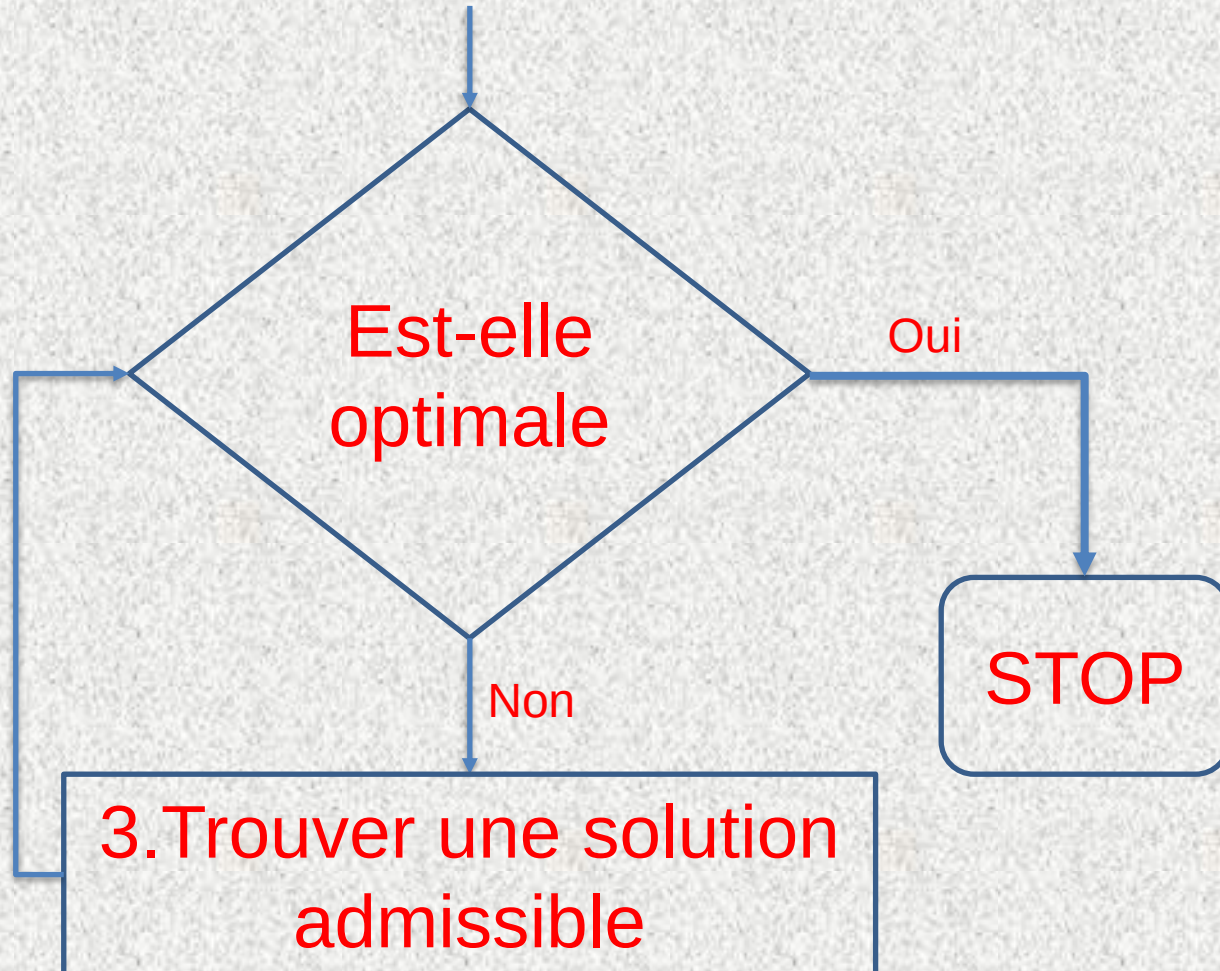
$$f(x, y) = Ax + By$$

Des variables d'écart positives ou nulles sont introduites pour remplacer les inégalités par des égalités. Donc, la forme d'un problème de programmation linéaire est constituée par une fonction économique, un ensemble d'inégalités faisant intervenir des variables de décisions et des variables d'écart. Les problèmes d'optimisation linéaire consistent à minimiser une fonction linéaire de variables réelles.

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbf{c}^\top \mathbf{x} := \sum_{i=1}^n c_i x_i,$$

Algorithme du simplexe

1. Ajout des variables d'écart
2. Déterminer une solution de base réalisable



Utilisation des tableaux

Etape 1. Initialisation du tableau

Etape 2. Identifier les variables entrantes

Etape 3. Identifier les variables sortantes

Etape 4. Mettre à jour le tableau

Etape 5. Vérifier critère d'arrêt

Exemple 1

$$\text{Max } Z = X_1 + 2X_2$$

$$X_1 \leq 2$$

$$X_2 \leq 2$$

$$X_1 + X_2 \leq 3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

1. Ajout des variables d'écart

$$\text{Max } Z = X_1 + 2X_2 + 0e_3 + 0e_4 + 0e_5 = Z$$

$$X_1 + e_3 = 2$$

$$X_2 + e_4 = 2$$

$$X_1 + X_2 + e_5 = 3$$

$$X_1, X_2, e_3, e_4, e_5 \geq 0$$

Etape 2. Identifier les variables entrantes

Variables de base

$$e_3 = 2, e_4 = 2, e_5 = 3$$

Etape 3. Identifier les variables sortantes

Variables hors base

$$X_1, X_2 = 0$$

Etape 4. Mettre à jour le tableau



VB \ VHB	x_1	x_2	e_3	e_4	e_5	C	K
e_3	1	0	1	0	0	2	
e_4	0	1	0	1	0	2	
e_5	1	1	0	0	1	3	
Z	1	2	0	0	0	0	



Colonne du Pivot

4.1 Recherche du Pivot

Dans la quatrième ligne on va rechercher le plus grand élément positif (maximisation de la fonction objectif).

Remplir chaque élément de la colonne K par **col c /col pivot**

VB \ VHB	x_1	x_2	e_3	e_4	e_5	C	K
e_3	1	0	1	0	0	2	0
e_4	0	1	0	1	0	2	2
e_5	1	1	0	0	1	3	3
Z	1	2	0	0	0	0	

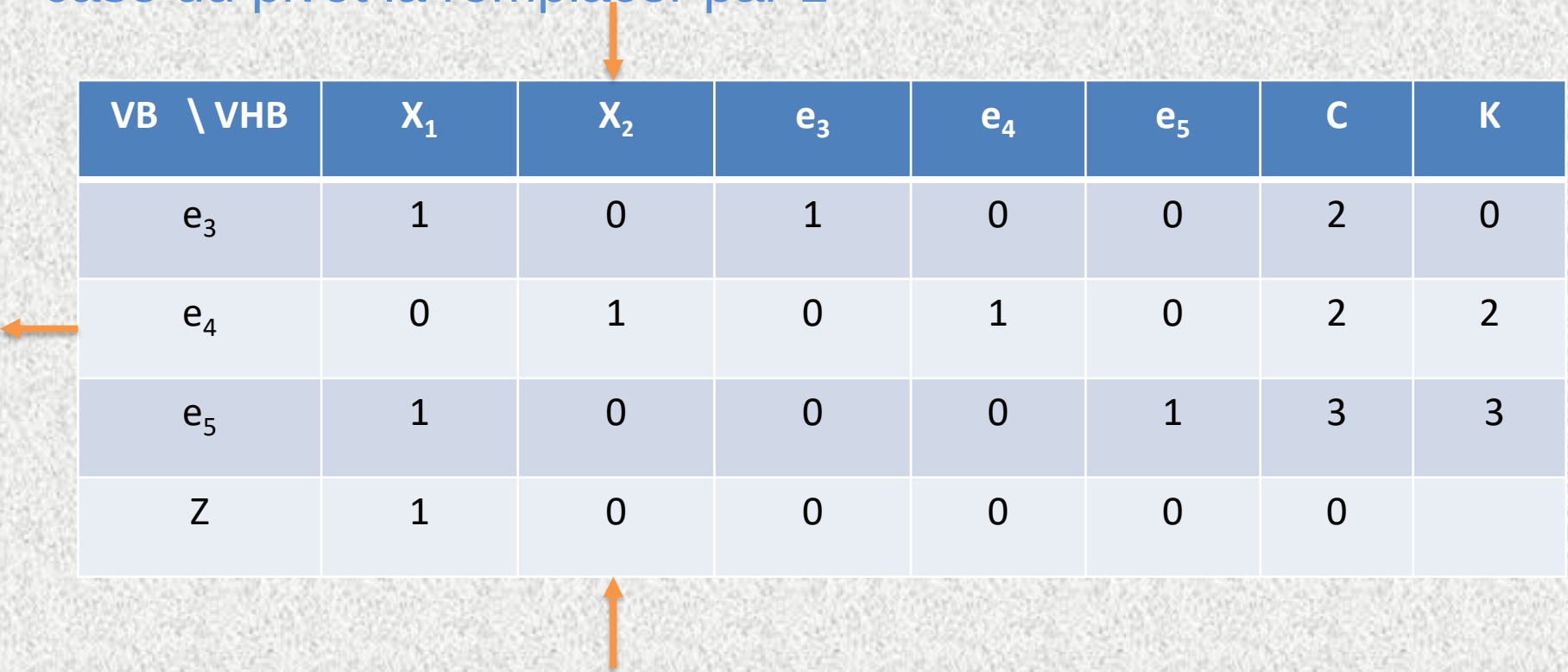
Déterminer le plus petit élément de la ligne K

L'élément se trouvant dans l'intersection de la colonne du pivot avec la colonne K **est le pivot**

Chaque élément de la ligne du pivot est remplacé par la formule 1

$$LP_i = \frac{LP_i}{\text{Valeur du pivot}} \quad \text{(Formule 1)}$$

Remplacer les éléments de la colonne du pivot par zéro sauf la case du pivot la remplacer par 1



VB \ VHB	X ₁	X ₂	e ₃	e ₄	e ₅	C	K
e ₃	1	0	1	0	0	2	0
e ₄	0	1	0	1	0	2	2
e ₅	1	0	0	0	1	3	3
Z	1	0	0	0	0	0	

X₂ va rentrer dans la base et e₄ va sortir

Le reste des éléments des lignes du tableau est remplacé par:

$$L_i = L_i - (VPCP_i * NVLP_i)$$

Avec :

L_i = Nouvelle Valeur de la ligne i pour chaque élément

L_i = Valeur précédente de la ligne i pour chaque élément

$VPCP_i$ = Valeur précédente de l'élément i de la colonne du pivot

$NVLP_i$ = Nouvelle valeur de l'élément i de la ligne du pivot)

	VB \ VHB	x_1	x_2	e_3	e_4	e_5	C	K
L1	e_3	1	0	1	0	0	2	0
LP	x_2	0	1	0	1	0	2	2
L3	e_5	1	1	0	0	1	3	3
L4	Z	1	2	0	0	0	0	



CP

VB \ VHB	x_1	x_2	e_3	e_4	e_5	C	K
e_3	1	0	1	0	0	2	
x_2	0	1	0	1	0	2	
e_5	1	0	0	-1	1	1	
Z	1	0	0	-2	0	-4	



CP

On vérifie la condition d'arrêt, ici il faut que toutes les valeurs de la colonne 4 soit ≤ 0 .

Le premier élément de la ligne 4 est = 1 c'est le plus grand

C'est la colonne du pivot et X_1 va rentrer dans la base

On refait la même chose que dans la diapositive 41

VB \ VHB	X_1	X_2	e_3	e_4	e_5	C	K
e_3	1	0	1	0	0	2	2
X_2	0	1	0	1	0	2	0
e_5	1	0	0	-1	1	1	1
Z	1	0	0	-2	0	-4	



CP



VB \ VHB	x_1	x_2	e_3	e_4	e_5	C	K
e_1	1	0	1	0	0	2	
x_2	0	1	0	1	0	2	
e_5	1	0	0	-1	1	1	
Z	1	0	0	-2	0	-4	



CP

VB \ VHB	x_1	x_2	e_3	e_4	e_5	C	K
e_3	0	0	1	1	-1	1	
x_2	0	1	0	1	0	2	
x_1	1	0	-1	-1	1	1	
Z	0	0	0	-1	-1	-5	



	VB \ VHB	X_1	X_2	e_3	e_4	e_5	C	K
L1	e_3	0	0	1	1	-1	1	
L2	X_2	0	1	0	1	0	2	
L3	X_1	1	0	0	-1	1	1	
L4	Z	0	0	0	-1	-1	-5	



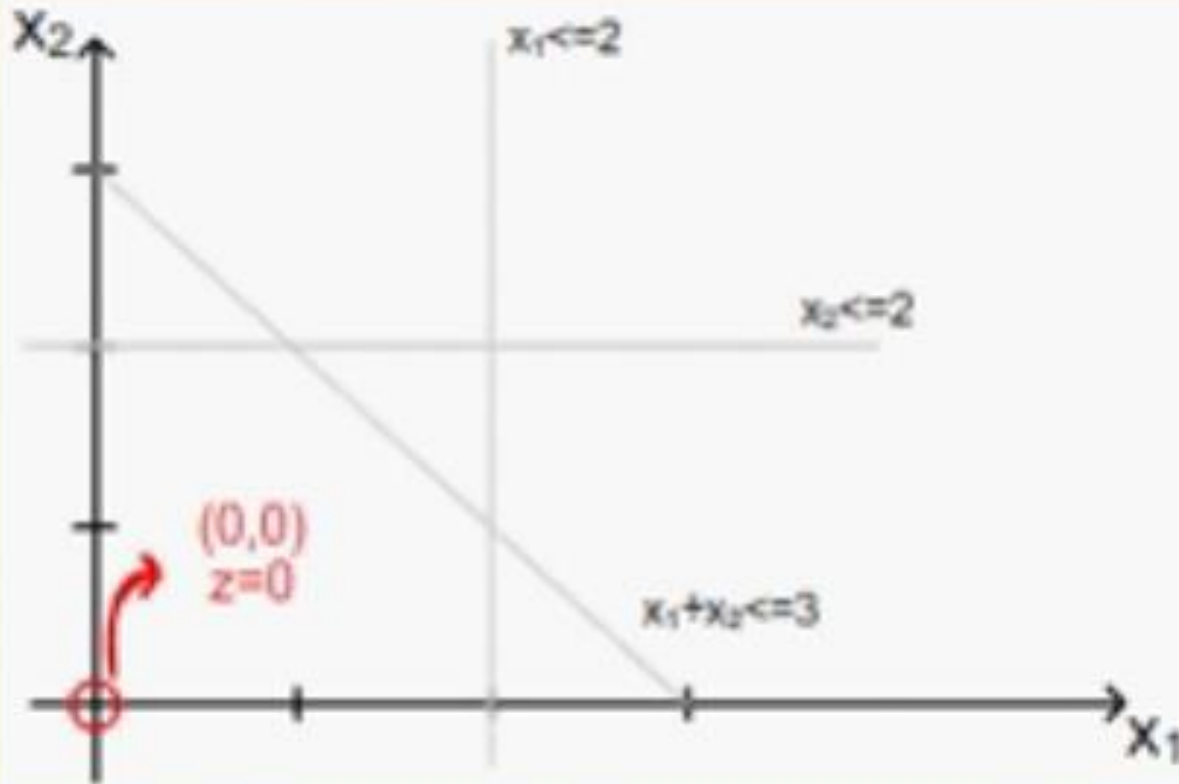
X_1 rentre dans la base et e_5 en sort

On remarque que dans la ligne 4 tous les éléments sont ≤ 0 , la condition d'arrêt est vérifiée on s'arrête car on a atteint la solution.

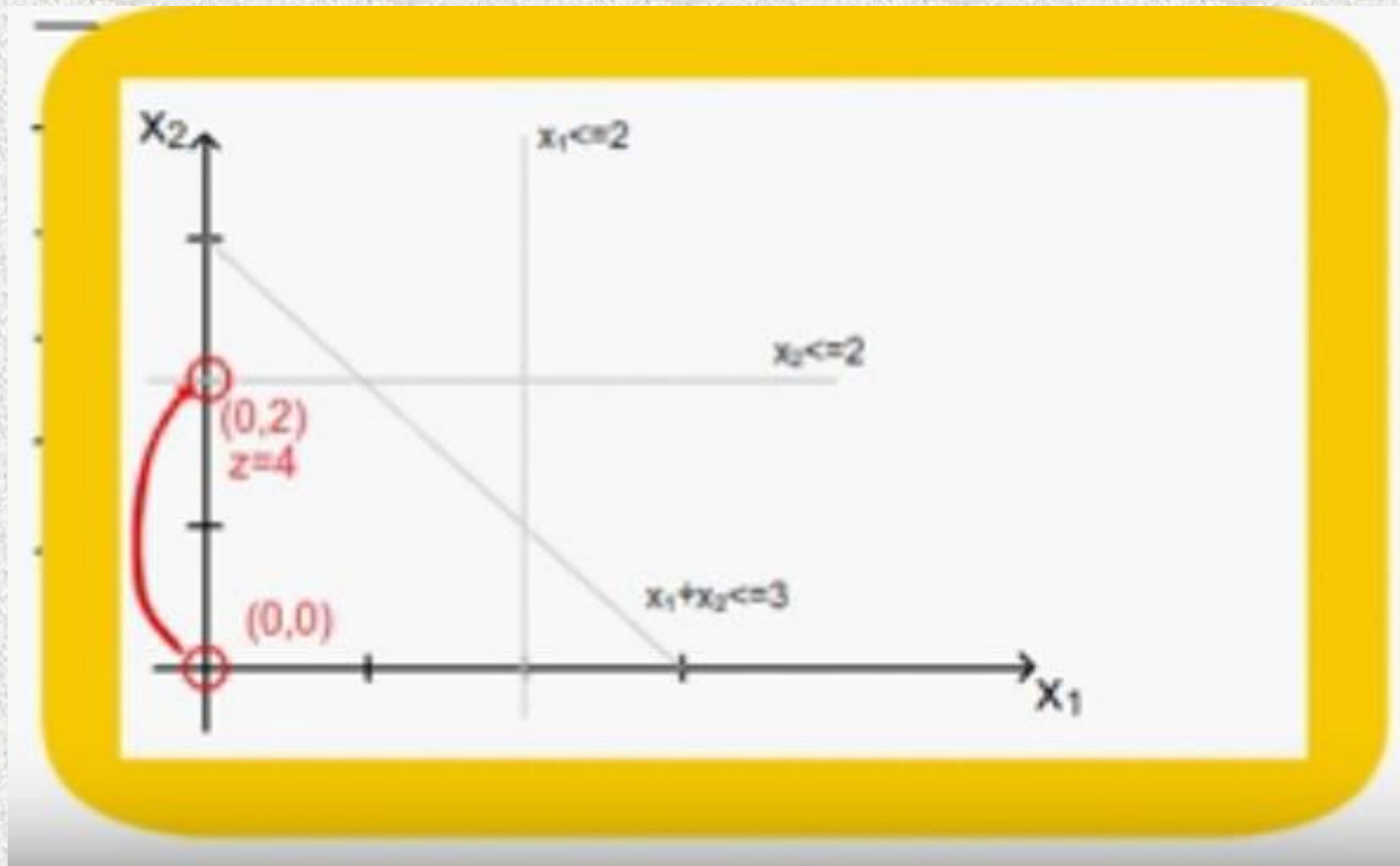
La solution optimale est :

- $X_1 = 1$
- $X_2 = 2$
- Et $Z = 5$

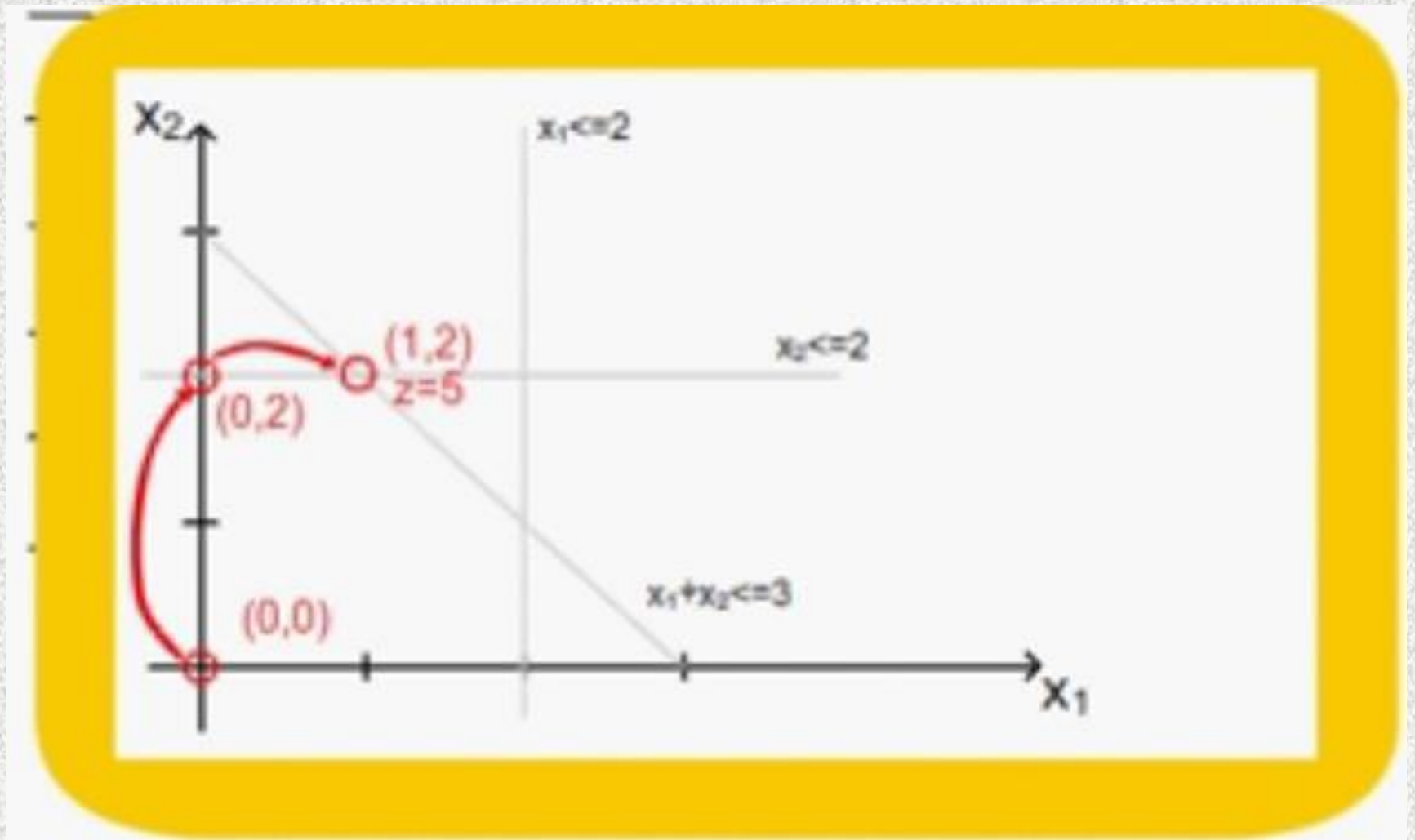
Solution Graphique 1



Solution Graphique 2



Solution Graphique 3



Exemple 2

Maximiser
sous les
contraintes:

$$Z = 3x + 2y$$

$$2x + y \leq 18$$

$$2x + 3y \leq 42$$

$$3x + y \leq 24$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

1. Ajout des variables d'écart

$$\text{Max } Z = 3X + 2Y + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 = Z$$

$$2X + Y + e_1 = 18$$

$$2X + 3Y + e_2 = 42$$

$$3X + Y + e_3 = 24$$

$$X, Y, e_1, e_2, e_3 \geq 0$$

Etape 2. Identifier les variables entrantes

Variables de base

$$e_1 = 18, \quad e_2 = 42, \quad e_3 = 24$$

Etape 3. Identifier les variables sortantes

Variables hors base

$$X, Y \text{ et } Z = 0$$

Etape 4. Mettre à jour le tableau



VB \ VHB	X	Y	e_1	e_2	e_3	C	K
e_1	2	1	1	0	0	18	
e_2	2	3	0	1	0	42	
e_3	3	1	0	0	1	24	
Z	3	2	0	0	0	0	



Colonne du Pivot

4.1 Recherche du Pivot

Dans la quatrième ligne on va rechercher le plus grand élément positif (maximisation de la fonction objectif).

Remplir chaque élément de la colonne K par **colo c / col pivot**

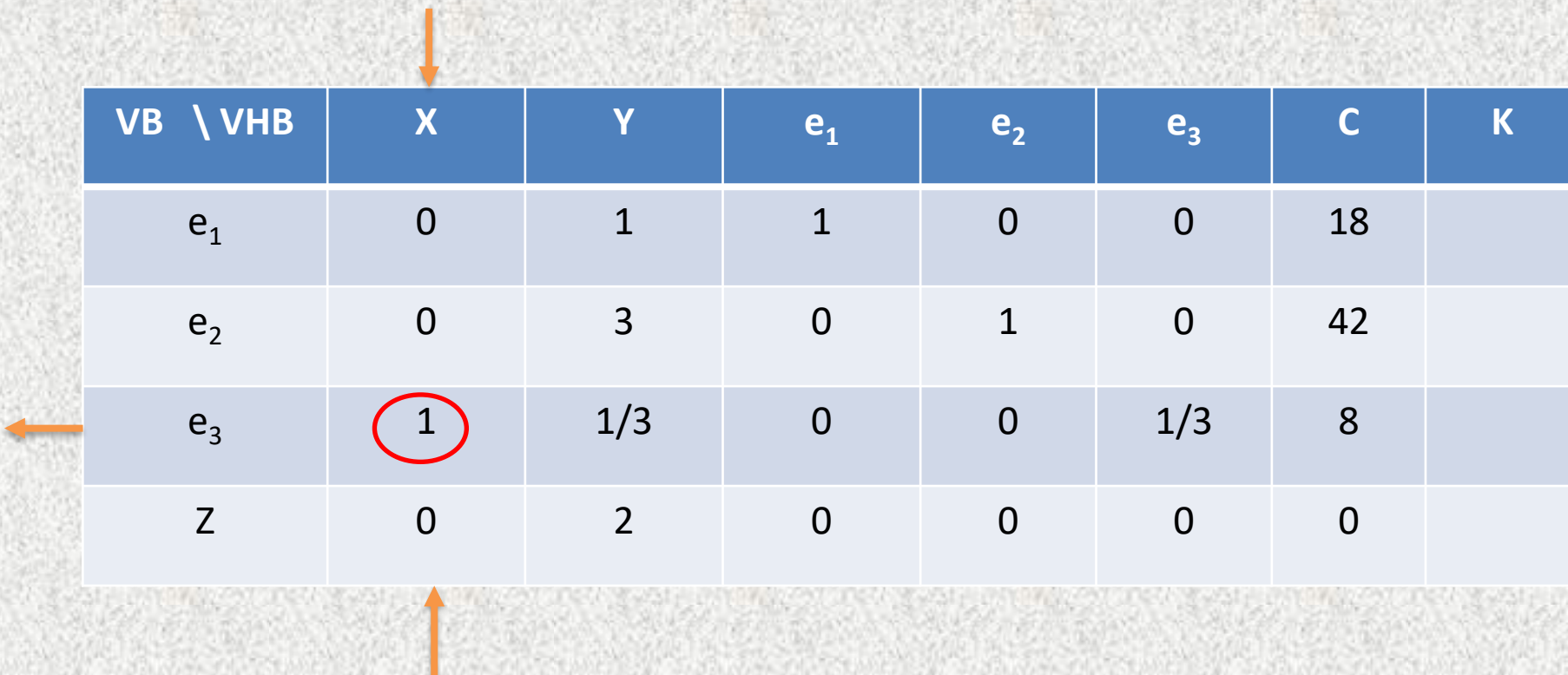
VB \ VHB	X	Y	e_1	e_2	e_3	C	K
e_1	2	1	1	0	0	18	9
e_2	2	3	0	1	0	42	21
e_3	3	1	0	0	1	24	8
Z	3	2	0	0	0	0	



Déterminer le plus petit élément de la ligne K

L'élément se trouvant dans l'intersection de la colonne du pivot avec la colonne K **est le pivot**

Remplacer les éléments de la colonne du pivot par zéro sauf la case du pivot la remplacer par 1



VB \ VHB	X	Y	e_1	e_2	e_3	C	K
e_1	0	1	1	0	0	18	
e_2	0	3	0	1	0	42	
e_3	1	$1/3$	0	0	$1/3$	8	
Z	0	2	0	0	0	0	

X va rentrer dans la base et e_3 va sortir,

Chaque élément de la ligne du pivot est remplacé par:

$$LP_i = \frac{LP_i}{\text{Valeur du pivot}}$$

Le reste des éléments des lignes du tableau est remplacé par:

$$L_i = L_i - (VPCP_i * NVLP_i)$$

Avec :

L_i = Nouvelle Valeur de la ligne i pour chaque élément

L_i = Valeur précédente de la ligne i pour chaque élément

$VPCP_i$ = Valeur précédente de l'élément i de la colonne du pivot

$NVLP_i$ = Nouvelle valeur de l'élément i de la ligne du pivot)

VB \ VHB	X	Y	e_1	e_2	e_3	C	K
e_1	2	1	1	0	0	18	
e_2	2	3	0	1	0	42	
e_3	3	1	0	0	1	24	
Z	3	2	0	0	0	0	



VB \ VHB	X	Y	e_1	e_2	e_3	C	K
e_1	0	$1/3$	1	0	$-2/3$	2	
e_2	0	$7/3$	0	1	$-2/3$	26	
X	1	$1/3$	0	0	$1/3$	8	
Z	0	1	0	0	-1	-24	







VB \ VHB	X	Y	e_1	e_2	e_3	C	K
e_1	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{2}{3}$	2	6
e_2	0	$\frac{7}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	26	$\frac{78}{7}$
X	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	8	24
Z	0	1	0	0	-1	-24	



VB \ VHB	X	Y	e_1	e_2	e_3	C	K
Y	0	1	3	0	-2	6	
e_2	0	0	-7	1	4	12	
X	1	0	-1	0	1	6	
Z	0	0	-3	0	1	-30	

VB \ VHB	X	Y	e_1	e_2	e_3	C	K
Y	0	$1/3$	1	0	0	2	6
e_2	0	$7/3$	0	0	0	26	$78/7$
X	1	$1/3$	0	0	0	8	24
Z	0	1	0	0	0	-24	



VB \ VHB	X	Y	E_1	e_2	e_3	C	K
Y	0	1	1	0	0	2	6
e_2	0	0	$-7/3$	0	0	$74/3$	$78/7$
X	1	0	$-1/3$	0	0	$16/3$	24
Z	0	0	0	0	0	-26	

VB \ VHB	X	Y	e_1	e_2	e_3	C	K
Y	0	1	3	0	-2	6	-3
e_2	0	0	-7	1	4	12	3
X	1	0	-1	0	1	6	6
Z	0	0	-3	0	1	-30	



VB \ VHB	X	Y	e_1	e_2	e_3	C	K
Y	0	1	$-1/2$	$1/2$	0	12	
e_3	0	0	$-7/4$	$1/4$	1	3	
X	1	0	$3/4$	$-1/4$	0	3	
Z	0	0	$-5/4$	$-1/4$	0	-33	



e_3 rentre dans la base et e_2 en sort

On remarque que dans la ligne 4 tous les éléments sont ≤ 0 , la condition d'arrêt est vérifiée on s'arrête car on a atteint la solution.

La solution est :

- $Y = 12$
- $X = 3$
- Et $Z = 33$

Exemple 3

Maximiser $Z = x + 2y$
sous les contraintes: $-3x + 2y \leq 2$
 $-x + 2y \leq 4$
 $x + y \leq 5$
 $x \geq 0, y \geq 0$

Dualité

- À tout programme linéaire, on associe un second PL appelé dual du premier
- Le premier PL est appelé Primal.

Théorème:

- Si un programme linéaire admet une solution optimale alors son dual possède également une solution optimale.
- les valeurs de ces deux solutions sont égales.

Interprétation de la dualité

- **Problème primal** : Planification de production

n biens à produire

x_j : quantité de biens j produite

c_j : recette unitaire due au bien j

Objectif : Maximiser la recette totale

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

m ressources à utiliser

– b_i : quantité de ressource i disponible

– a_{ij} : consommation de ressource i par unité de bien j produite

Contraintes : ne pas consommer plus que les quantités disponibles :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

Problème dual : Une autre entreprise s'intéresse à l'achat de toutes nos ressources

- y_i : prix de rachat d'une unité de ressource i

Objectif : minimiser le prix total de rachat

$$w = \sum_i^m y_i b_i$$

Contraintes : assurer que les prix offerts sont compétitifs pour l'entreprise

$$\sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \geq c_j \quad j = 1, \dots, n$$

Valeur de rachat des
ressources nécessaires à
produire une unité du bien j

Exemple

Soit le programme linéaire Primal suivant:

$$P \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = c x \\ \text{S C } \quad A x \geq b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right.$$

Son Dual est le suivant :

$$D \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } v = w b \\ \text{S C } \quad w A \leq c \\ \quad \quad w \geq 0 \end{array} \right.$$

Où w sont les variables du dual:

Passage du primal au dual

min	max
primal	dual
dual	primal
variable ≥ 0	contrainte $\leq$
variable ≤ 0	contrainte $=$
variable ≤ 0	contrainte $\geq$
contrainte $\leq$	variable ≤ 0
contrainte $=$	variable ≤ 0
contrainte $\geq$	variable ≥ 0

Exemple

$$\text{Max } z = 4 x_1 + 5 x_2 + 2 x_3$$

$$\begin{array}{rcll} \text{SC} & 2 x_1 + 4 x_2 & & = 3 \\ & & 2 x_3 & \geq 2 \\ & 3 x_1 + x_2 + & x_3 & \leq 2 \\ & & x_2 + & x_3 \leq 1 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0$$

min	max
primal	dual
dual	primal
variable ≥ 0	contrainte $\leq$
variable ≤ 0	contrainte $\geq$
variable $= 0$	contrainte $=$
contrainte $\leq$	variable ≥ 0
contrainte $\geq$	variable ≤ 0
contrainte $=$	variable $= 0$

1, Déterminer les variables du dual et la fonction objectif:

Selon le tableau précédent, puisque le primal à une fonction objectif à Maximiser, on doit minimiser la fonction objectif du dual. Les variables du Dual sont: w_1, w_2, w_3 et w_4 au correspondant au nombre de contraintes du primal,

La fonction objectif du dual est :

$$\begin{array}{ll} \text{Min } v = 3 w_1 + 2 w_2 + 2 x_3 + w_4 & \\ & \\ \text{SC} \quad \begin{array}{ll} 2 w_1 + 3 w_3 & \geq 4 \\ 4 w_1 + w_3 + w_4 & \leq 5 \\ & 2 w_2 + w_3 + w_4 \geq 2 \end{array} & \text{D} \\ & \\ w_1 \geq 0, w_2 \leq 0, w_3 \geq 0, w_4 \geq 0 & \end{array}$$

Exercices:

$$\text{Min } z = -3x_1 - x_2 - 3x_3$$

$$\text{sujet à } 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

$$\text{Max } z = 3x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$\text{sujet à } x_1 + 2x_2 \geq 10$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 = 7$$

$$x_1 + 3x_3 \leq 8$$

$$x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Exemple

A l'optimum

- La valeur de $c_j - z_j$ pour une variable d'écart du primal = la valeur de la variable de décision du dual
- La valeur $c_j - z_j$ pour une variable de décision du primal = la valeur de la variable d'écart du dual

Interprétation économique de la dualité

- La variable duale associée à une contrainte correspond au coût de cette contraintes dans la solution courante
- Si cette contrainte est saturée, ce coût est positif.
- Il est nul si cette contrainte n'est pas saturée

Récapitulation des Propriétés liées à la dualité

- Le sens d'optimisation est toujours inversé entre un PL et son dual.
- (primal) PL de $\max$ $sc \leq \rightarrow$ (dual) PL de $\min$ $sc \geq$
- **Remarque** : on transforme le PL en $\max$ $sc \leq$ ou en PL de $\min$ $sc \geq$ (en multipliant les contraintes par -1).
- Contrainte (Primal) $\rightarrow$ Variable (Dual)
- Variable (Primal) $\rightarrow$ Contrainte (Dual)
- Si un PL a n variables et m contraintes, son dual a m variables et n contraintes.
- Si (Primal) une contrainte $= \rightarrow$ la variable associée (Dual) est sans contrainte de signe.
- Si (Primal) variable sans contrainte de signe $\rightarrow$ la contrainte associée (dual) est une $=$.
- La dualisation est une opération involutive
 - le dual du dual est le problème de départ.

Intérêt de la dualité

- Interprétation économique
- Peut être plus facile à résoudre,
 - L'une des deux formulations est souvent avantageuse en complexité de calcul.
- Si l'on nous propose une solution du primal, pour vérifier son optimalité il suffit de résoudre le système d'équations (*de variables y_i*) qui en découle.

Algorithme du simplexe dual

- Algorithme de simplexe primal:
 - Se déplacer d'une solution de base réalisable vers une solution de base réalisable
 - Jusqu'à trouver une solution optimale.
 - Il suppose la connaissance d'une solution de base réalisable de départ
- Algorithme de simplexe dual:
 - Se déplacer d'une solution de base non réalisable mais optimale vers une solution de base non réalisable mais optimale
 - Jusqu'à trouver une solution réalisable.
 - Il suppose la connaissance d'une solution de départ
 - de base non réalisable
 - optimale

Parallèle entre l'algo. du simplexe primal et l'algo. du simplexe dual

Algo. du simplexe primal

Recherche dans le domaine réalisable

Choisit la variable d'entrée pour réduire la valeur de la fonction économique

Choisit la variable de sortie pour préserver la réalisabilité

Stop quand une solution optimale est trouvée ou que le problème n'est pas borné inférieurement

Algo. du simplexe dual

Recherche à l'extérieur du domaine réalisable

Choisit le variable de sortie pour éliminer une variable de base négative

Choisit la variable d'entrée pour préserver la condition d'optimalité

Stop quand la solution est réalisable ou quand le problème n'est pas réalisable

Algorithme dual (minimisation)

1. Construire une base de départ non réalisable pour laquelle $\forall j : Z_j - c_j \leq 0$
 - Multiplier toutes les contraintes par -1.
2. Si $\forall i : b_i \geq 0$, stop : la solution actuelle est réalisable et optimale
Sinon aller en 3.
3. Sélectionner une $b_i < 0$, qui a la valeur négative la plus forte
 - soit **br** (**critère de sortie**)
4. Si tous les $a_{rj} \geq 0$, stop : le problème n'admet pas de solution réalisable
Sinon aller en 5.
5. Pour tous les $a_{rj} < 0$, chercher celui qui réalise le $\min((Z_j - c_j)/a_{rj})$ (**critère d'entrée**)
 - soit **ars** qui réalise le minimum devient le **pivot**. Aller en 6.
6. Effectuer un **pivotage simplexe** avec **ars** comme pivot et aller en 2.

Exemple

$$\begin{aligned} \min & 2000 x_1 + 3000 x_2 \\ & 1,6 x_1 + 0,8 x_2 \geq 80 \\ & 0,2 x_1 + 0,4 x_2 \geq 20 \\ & 0,1 x_1 + 0,1 x_2 \geq 8 \\ & x_1 \text{ et } x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min & 2000 x_1 + 3000 x_2 \\ & 1,6 x_1 + 0,8 x_2 \geq 80 \\ & 0,2 x_1 + 0,4 x_2 \geq 20 \\ & 0,1 x_1 + 0,1 x_2 \geq 8 \\ & x_1 \text{ et } x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Programmation Linéaire en nombres entiers

Définitions :

Un **programme linéaire en nombres entiers** est un programme dont les variables sont contraintes à ne prendre que des valeurs entières.

Souvent, elles sont contraintes à prendre les valeurs 0 ou 1. On parle alors d'un **programme binaire**.

On appelle problèmes mixtes (**MIP en anglais pour Mixed Integer Programming**) les problèmes comportant un certain nombre de variables linéaires (**continues**) et un certain nombre de variables en nombres entiers (**discrètes**).

Exemples: problème d'affectation, problème de flot maximal, problème de production en nombres entiers.

Exemple 1. Problème de sac à dos (knapsack)

Un randonneur emporte dans son sac à dos un poids limité à P . Chaque objet i qu'il peut emporter pèse un poids p_i et possède une utilité c_i pour la randonnée.

Quels objets le randonneur doit-il emporter pour maximiser l'utilité totale, sans dépasser le poids total permis ?

Modélisation du problème de sac à dos

- n objets de poids p_i et d'utilité c_i
- Pour les variables

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si le randonneur prend l'objet } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\mathbf{x}} \left[F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n c_i x_i \right] \quad \leftarrow \text{maximisation de l'utilité totale} \\ \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq P \quad \leftarrow \text{limitation du poids total} \\ x_i \in \{0, 1\} \end{array} \right.$$

Exemple 2. Problème de remplissage

On veut remplir la cale d'un bateau, d'un entrepôt ... limité en poids (P) et en volume (V).

- n objets de poids p_i , de volume v_i et d'utilité c_i .
- Variables x_i = quantité de l'objet i avec $x_i \in \{0; \dots; m\}$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max_{\mathbf{x}} \left[F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n c_i x_i \right] & \leftarrow \text{maximisation de l'utilité totale} \\ \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq P & \leftarrow \text{limitation du poids total} \\ \sum_{i=1}^n v_i x_i \leq V & \leftarrow \text{limitation du volume total} \\ x_i \in \{0, \dots, m\} & \end{array} \right.$$

Problèmes avec quantités indivisibles

Il s'agit des problèmes *ou*,

- *soit les quantités produites,*
- *soit les quantités de facteurs à mettre en œuvre doivent être entières.*
- C'est le cas, par exemple, de la construction d'avions.

La programmation linéaire en variables entières est très importante, car la plupart des problèmes réels comportent des variables qui doivent, par nature, prendre nécessairement une valeur entière.

Nous allons voir , dans les exemples suivant, **qu'il est nécessaire de résoudre le problème en nombres entiers** et que la méthode simpliste qui consisterait à résoudre le problème linéaire et ensuite arrondir sa solution optimale peut conduire à des sous-optimalités.

Exemple 1:

Considérons le problème PLE suivant :

$$\text{Min } z = -10x - 11y$$

$$\text{Sujet à } 10x + 12y \leq 59$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

x et y entiers.

L'optimum est (1,4) alors que la solution du problème continu associé est (5.9,0), résultat obtenu avec :

<http://www.phpsimplex.com/simplex/simplex.htm?l=fr>

On remarque la nette différence entre les 2 solutions.

En résolvant le **modèle linéaire** obtenu en relâchant le caractère entier des variables, c'est-à-dire en résolvant la relaxation linéaire suivante :

$$\begin{array}{l} \text{Max } z = x_1 + x_2 \\ \text{SC } \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ -8x_1 + 10x_2 \leq 13 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N}. \end{array} \right. \end{array}$$

En résolvant le **modèle linéaire** obtenu en relâchant le caractère entier des variables, c'est-à-dire en résolvant la relaxation linéaire suivante :

$$\begin{array}{l} \text{Max } z = x_1 + x_2 \\ \text{SC } \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ -8x_1 + 10x_2 \leq 13 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

on obtient (voir figure 5.1) la solution optimale suivante du problème linéaire : $(x_1, x_2) = (4; 4.5)$.

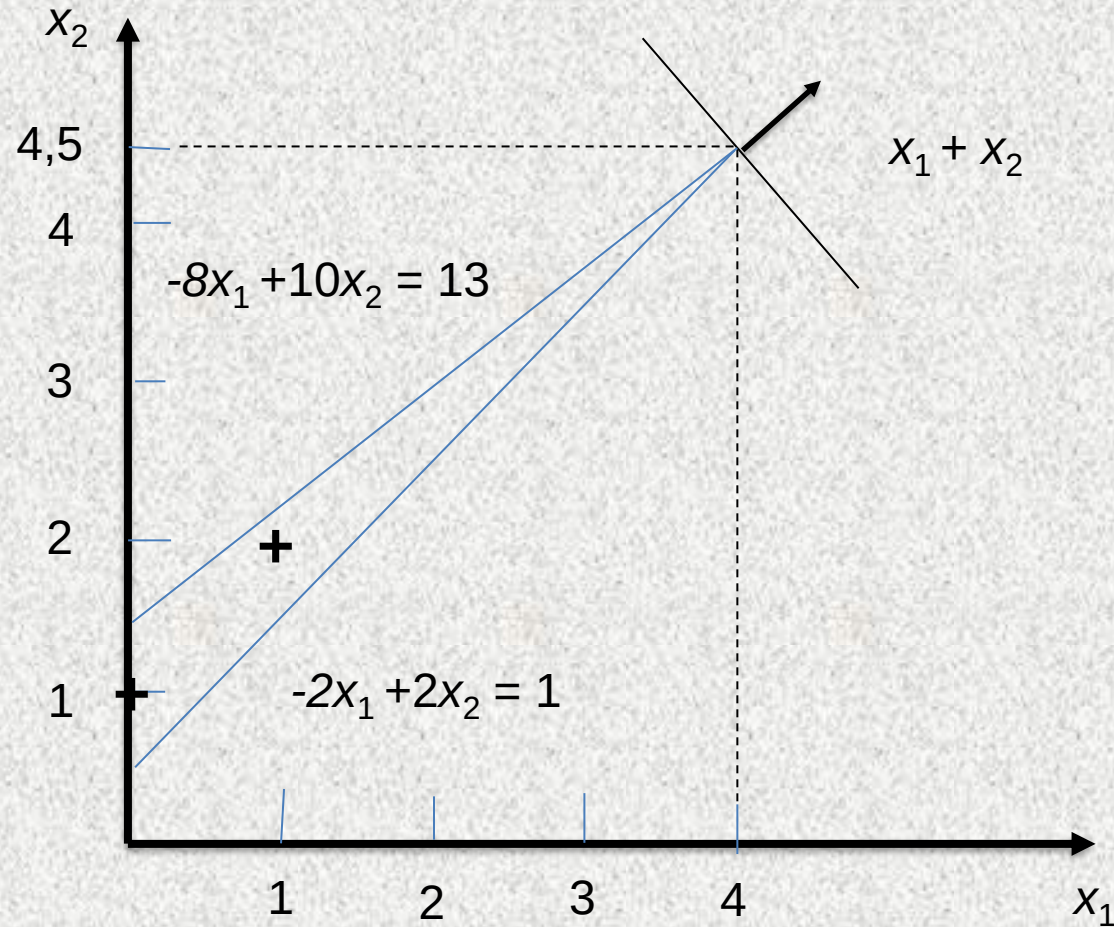


Figure 5.1: Exemple de programme en nombres entiers

- La solution du **problème en nombres entiers** est, comme on peut le voir à la figure 5.1, le point :

$$(X_1^*, X_2^*) = (1, 2).$$

- Donc **arrondir la solution de la relaxation linéaire ne fournit pas la solution optimale**,
- dans ce cas, cela donne la solution $(x_1, x_2) = (4, 4)$ ou la solution $(x_1, x_2) = (4, 5)$, toutes deux non réalisables, voir figure 5.1

Procédures de Séparation et d'Evaluation (Branch and Bound)

1) Programmation linéaire en variables binaires

a) Cas des coefficients positifs

Problème de sac à dos

$$\begin{cases} \max_{\mathbf{x}} \left[F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n c_i x_i \right] \\ \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq d \\ x_i \in \{0, 1\} \end{cases}$$

avec a_i et c_i **positifs ou nuls**.

→ 2^n cas à examiner a priori.

On réduit ce nombre en procédant par "**Séparation et Evaluation**" (Branch and Bound).

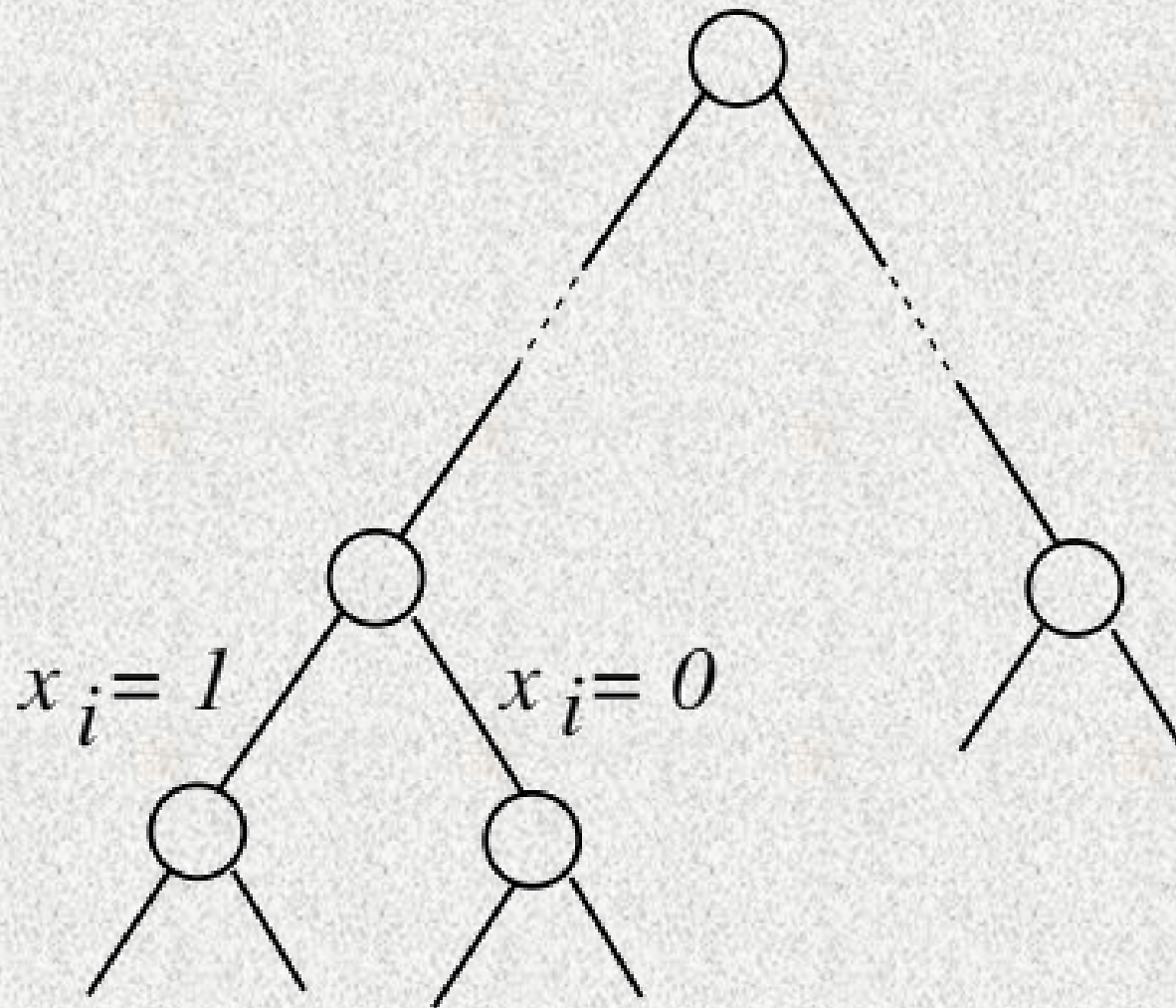
Principe des *Procédures de Séparation et Evaluation* (PSE)

- Séparation

L'examen d'un objet (le prendre ou le laisser) **sépare** l'ensemble des solutions possibles en 2.

➡ Développement d'une **arborescence** dont chaque sommet correspond à un sous-ensemble de solutions réalisables

La racine de l'arborescence représente l'ensemble de toutes les solutions réalisables.



- Evaluation
- Estimation principale.

Pour chaque sommet S_k , on **évalue** une valeur b_k qui est un **majorant** de la meilleure solution correspondant à S_k (un **minorant** si on a un "min").

- Si $b_k < \overline{F}$ où $\overline{F}$ est la valeur de F pour une solution réalisable connue, **alors le sommet S_k n'est pas exploré** : S_k ne peut pas contenir une meilleure solution que celle déjà obtenue ($b_k < \overline{F} \leq \max F$).
- Initialement, pour le sommet S_0 , on choisit

$$b_0 = \sum_{i=1}^n c_i$$

- Estimation secondaire.

Pour éviter de construire des sommets S_k qui n'ont pas de solution réalisable, on évalue une valeur secondaire e_k associée à la contrainte et à S_k . L'estimation e_k est un **majorant de la variable d'écart** pour le sous-ensemble S_k des solutions réalisables.

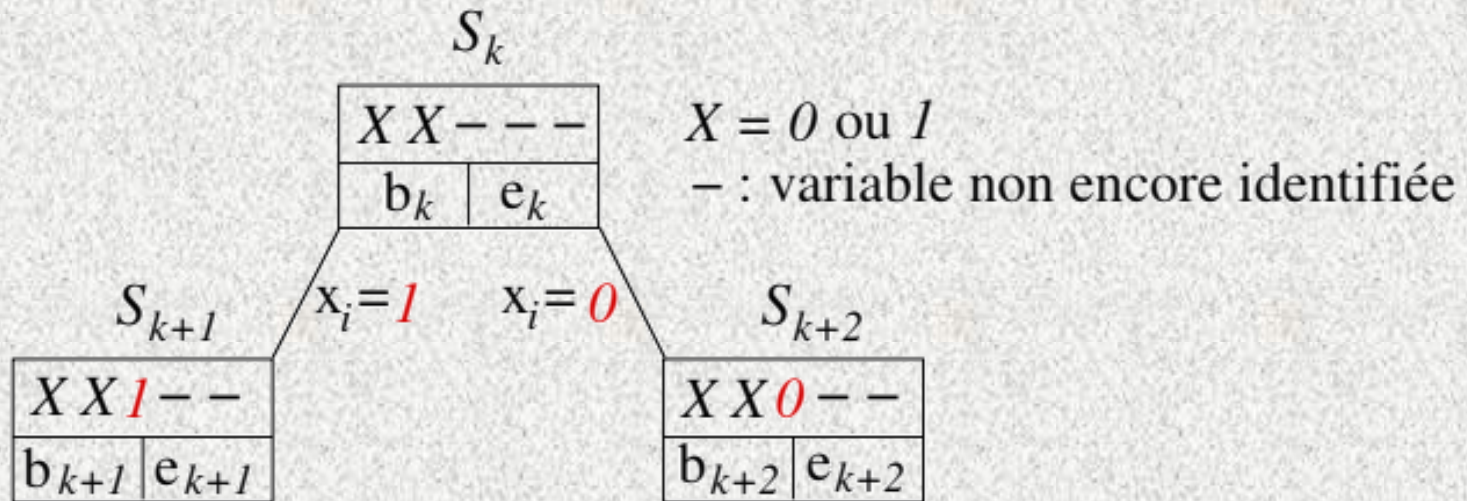
- Si $e_k < 0$ alors le sommet S_k n'est pas construit.
- Initialement, pour le sommet S_0 , on choisit

$$\boxed{e_0 = d} \quad (d : \text{second membre})$$

(correspond à prendre $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ dans les contraintes)

- Calcul des estimations b_k et e_k

Examen de la variable x_i correspondant au sommet S_k .



Mise à jour des estimations principale et secondaire

$b_{k+1} = b_k$ $e_{k+1} = e_k - a_i$

$b_{k+2} = b_k - c_i$ $e_{k+2} = e_k$

Stratégie de parcours : on explore en priorité le sommet S_k qui a la meilleure estimation principale b_k .

Détermination de $\bar{F}$: valeur de F pour une solution réalisable connue.

Deux façons de construire une solution réalisable

1. On renumérote les variables par leurs coefficients dans F décroissants : $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n$.

On regarde si on peut donner la valeur $x_1 = 1$ puis on examine x_2 , etc. ... $\longrightarrow$ on obtient la valeur $\bar{F}_1$

2. On renumérote les variables par les coefficients $\frac{c_i}{a_i}$ décroissants : $\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \dots \geq \frac{c_n}{a_n}$

On regarde si on peut donner la valeur $x_1 = 1$ puis on examine x_2 , etc. ... $\longrightarrow$ on obtient la valeur $\bar{F}_2$

On choisit

$$\bar{F} = \max(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$$

Exemple

$$\begin{cases} \max_{\mathbf{x}} [F(\mathbf{x}) = 16x_1 + 18x_2 + 15x_3] \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ x_i \in \{0, 1\} \end{cases}$$

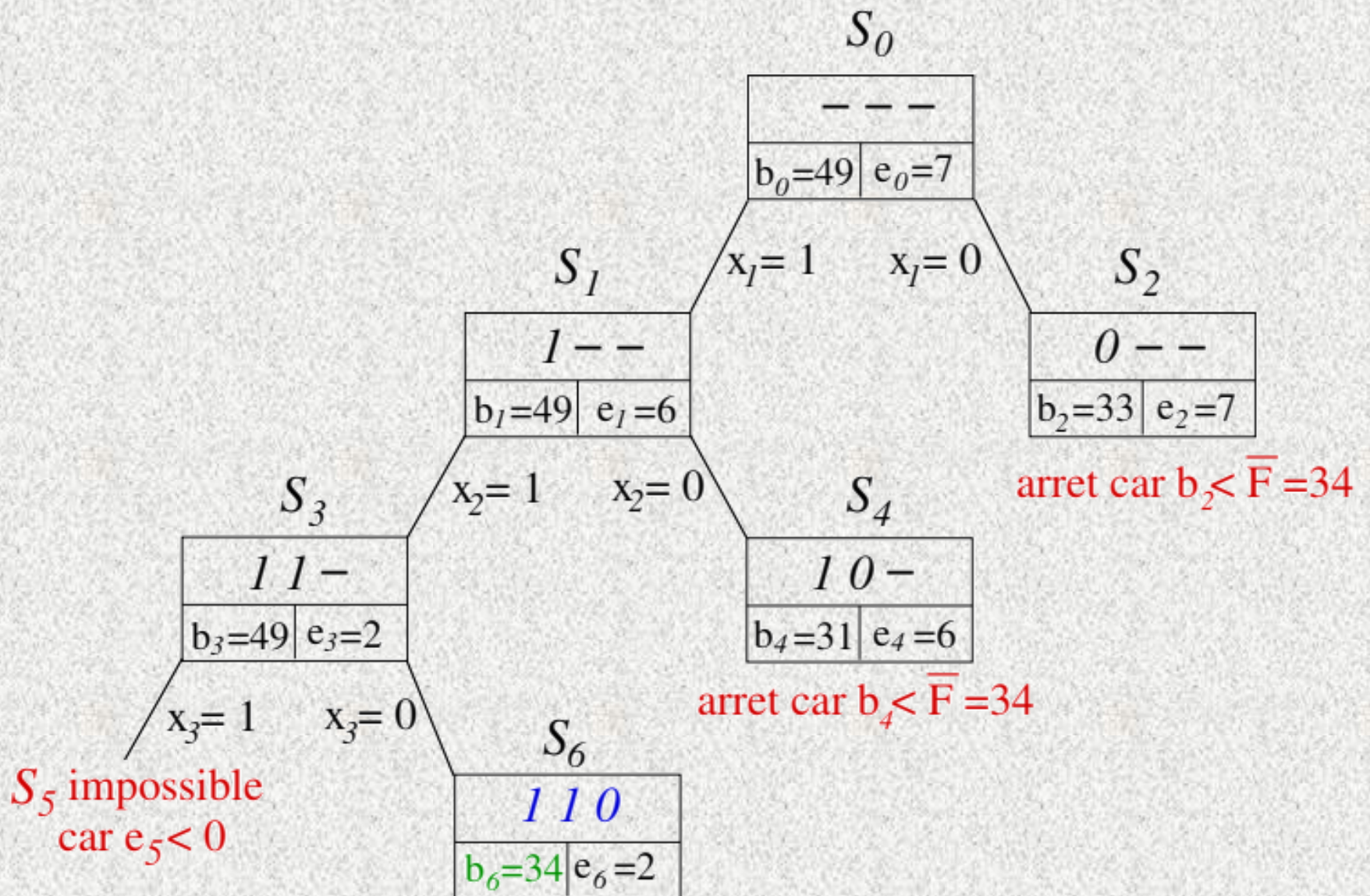
- **Estimations initiales** : $b_0 = c_1 + c_2 + c_3 = 49$; $e_0 = 7$.
- **Détermination de $\bar{F}$**

i	1	2	3
c_i	16	18	15
c_i/a_i	16	4,5	5

- **Calcul de $\bar{F}_1$** : on examine d'abord x_2 : $x_2 = 1$; puis $x_1 = 1$ et enfin $x_3 = 0$) $\bar{F}_1 = 34$

Calcul de $\bar{F}_2$: on examine d'abord x_1 : $x_1 = 1$; puis $x_3 = 1$ et enfin $x_2 = 0$) $\bar{F}_2 = 31$

On choisit $\bar{F} = \max(\bar{F}_1; \bar{F}_2) = 34$.



On obtient $\max F = 34$ avec $x_1^* = 1, x_2^* = 1, x_3^* = 0$.