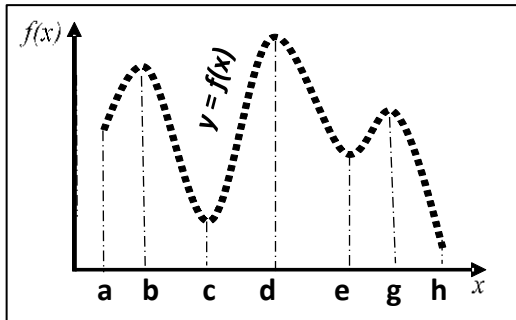


Exercice 1

La figure ci-dessous illustre la courbe d'une fonction entière f d'une variable entière x dont on se propose de maximiser.



- 1) Ecrire la formulation mathématique de ce pb.
- 2) Quel est le type de ce pb.
- 3) Calculer l'espace de recherche et sa taille.
- 4) Déterminer sa solution optimale.
- 5) Que représentent b et g pour ce pb.

Exercice 2

Considérons le PVC (TSP) symétrique et métrique avec n le nombre de villes et $d[i][j]$ la matrice des distances.

- 1) Comment représenter une solution pour ce problème.
- 2) Ecrire la formulation mathématique de ce pb.
- 3) Rappeler le nombre de solutions candidates.
- 4) Ecrire l'algorithme retournant la distance totale d'une solution x puis évaluer sa complexité.
- 5) Ecrire un algorithme exhaustif pour résoudre ce pb.

Exercice 3

Considérons le PSD (KSP) simple (0/1) (n , v_i , w_i , W).

- 1) Comment représenter une solution pour ce problème.
- 2) Ecrire la formulation mathématique de ce pb.
- 3) Rappeler le nombre de solutions candidates.
- 4) Ecrire l'algorithme qui teste si un algorithme est admissible puis évaluer sa complexité.
- 5) Ecrire l'algorithme retournant la valeur totale d'une solution x puis évaluer sa complexité.
- 6) Ecrire un algorithme exhaustif pour résoudre ce pb.

Exercice 4

Considérons le problème SAT- k d'une fonction booléenne f de m clauses et n variables définie par une matrice $m \times k$.

- 1) Rappeler le nombre de solutions candidates.
- 2) Ecrire l'algorithme qui teste si une solution candidate satisfait la fonction booléenne.
- 3) Ecrire un algorithme polynomial qui résout CNF-2.
- 4) Ecrire un algorithme polynomial qui résout DNF- k .
- 5) Ecrire un algorithme exhaustif qui résout CNF- k .

Exercice 5

Etant donnés n articles chacun ayant un revenu de transport v_i dinars et un poids w_i kg. On désire déterminer quels articles transporter par un camion de capacité C kg ($C < \sum_{i=0}^{n-1} w_i$) afin de maximiser le revenu total de transport.

- 1) Quel problème vu au cours pouvant être considéré comme modèle pour ce problème ?
- 2) Déduire la classe de complexité de ce problème.
- 3) Ecrire la formulation mathématique de ce problème.
- 4) Calculer la taille de l'espace de recherche.
- 5) L'algorithme ci-contre constitue une partie de la résolution de ce problème.
 - a) Que représente le vecteur binaire x pour le problème donné.
 - b) Que fait cet algorithme ? Evaluer sa complexité.
- 6) Ecrire l'algorithme qui calcule le revenu total de transport pour une solution x puis évaluer sa complexité.

```
boolean ALGO (int n , int [] w , binary [] x , int C)
{ s = 0 ;
  for ( i = 0 ; i < n ; i++)
    s += x[i] * w[i] ;
  return (s <= C) ; }
```

Exercice 6

Une entreprise fabrique 2 types de produits P_1 et P_2 .

Pour produire une unité de P_1 , l'entreprise utilise 3 kg de matière première.

Pour produire une unité de P_2 , l'entreprise utilise 2 kg de matière première et une unité de P_1 .

On dispose de 500 kg de matière première par jour.

Le produit P_1 utilisé comme semi-fini peut également être vendu.

Les revenus unitaires de P_1 et P_2 sont de 40 et 60 DA respectivement.

L'objectif est de maximiser le revenu total des produits vendus par jour.

- 1) Formulez un modèle mathématique du problème.
- 2) Quel est le type de ce problème d'optimisation ?
- 3) Donner une solution admissible et calculer le revenu correspondant.

Exercice 7

Une entreprise fabrique 3 types de produits P_1 , P_2 et P_3 .

Pour produire 1 unité de produit P_1 , l'entreprise utilise 2 kg de matière première.

Pour produire 1 unité de produit P_2 , l'entreprise utilise 3 kg de matière première et 1 unité de produit P_1 .

Pour produire 1 unité de produit P_3 , l'entreprise utilise 4 kg de matière première, 3 unités de produit P_1 et 2 unités de produit P_2 . Il y a 1000 kg de matière première disponible.

Les produits P_1 et P_2 utilisés comme produits semi-finis peuvent également être vendus. Les prix des biens P_1 , P_2 et P_3 sont de 5, 10 et 30 DA. L'objectif est de maximiser le revenu total des produits vendus.

- 1) Formulez un modèle mathématique du problème.
- 2) Donner une solution admissible.
- 3) Quel est le type de ce problème d'optimisation ?

Exercice 8

Etant donné n entiers a_i ; $i=1,n$ et un entier B . On se propose de trouver le sous-ensemble des entiers a_i dont la somme est maximale et ne dépassant pas B sachant que $B < \sum_{i=1}^n a_i$.

Exemple : input : $n=4$; $a[]=\{2,4,3,5\}$; $B=11$; output : $\{2,4,5\}$

- 1) Ecrire la formulation mathématique de ce problème.
- 2) Donner l'espace de recherche de ce problème et sa taille.
- 3) Quel est le type de ce problème d'optimisation.
- 4) Montrer que ce problème est un cas particulier du problème du sac à dos.
- 5) En termes de complexité, que représente ce problème par rapport au problème du sac à dos ?
- 6) En déduire la classe de complexité de ce problème.
- 7) Appliquer la méthode de la programmation dynamique à l'exemple ci-dessus.
- 8) Ecrire l'algorithme correspondant et évaluer ses complexités temporelle et spatiale.

Exercice 9

Le problème du sac-à-dos à variables entières bornées s'énonce comme suit :

Etant donnés n objets chacun ayant une valeur v_i , un poids w_i et un nombre d'exemplaires n_i . On dispose d'un sac de capacité C ($C < \sum_{i=0}^{n-1} n_i * w_i$).

On désire déterminer les nombres d'exemplaires de chaque objet à mettre dans le sac dont la somme pondérée des valeurs est maximale.

- 1) Ecrire la formulation mathématique de ce problème.
- 2) Calculer la taille de l'espace de recherche.
- 3) Proposer une heuristique pour calculer une borne supérieure et une autre pour calculer une borne inférieure de l'optimum (les algorithmes détaillés ne sont pas demandés, expliquer juste l'idée.)

Exercice 10

Soit le problème de coloration des arêtes d'un graphe $G(X, E)$ avec X l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes. L'objectif est de colorer les arêtes du graphe tel que deux arêtes ayant une extrémité commune soient de couleurs différentes. Soit c_i la couleur de l'arête i . Le but de l'exercice est d'appliquer la méthode de recherche taboue pour le problème.

Donnez la représentation d'une solution du problème, montrer à l'aide d'un graphe cette représentation.

Considérons trois couleurs c_1 , c_2 et c_3 et selon votre représentation, donnez une solution s initiale.

Exercice 11

Soit E un ensemble de n entiers a_i ; $i = 1, n$ et M un entier. On se propose de trouver le sous-ensemble de E dont la somme des éléments est M .

1. Comment représenter une solution de ce problème.
2. Ecrire la formulation mathématique de ce problème.
3. Calculer le nombre de solutions possibles.
4. Ecrire un algorithme glouton pour résoudre ce problème.
5. Applique cet algorithme à l'instance $E = \{3, 1, 5, 2, 7\}$ et $M = 10$.

Exercice 12

Considérons le problème du voyageur de commerce symétrique de n villes et soit $d[][]$ la matrice des distances. Une solution (un tour) est représentée par une permutation des entiers de 0 à $n-1$.

1. Rappeler la taille de l'espace de recherche en fonction de n .

2. Prenons $n = 4$ et $d[][] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 0 & 8 \\ 7 & 4 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

Calculer toutes les solutions possibles, leurs longueurs respectives et les représenter graphiquement.

3. Ecrire l'algorithme permettant de calculer la longueur (total des distances) d'une solution $x[]$.
4. L'heuristique du plus proche voisin consiste à calculer une solution en commençant par une ville quelconque (aléatoire) puis aller à la ville la plus proche et ainsi de suite.
 - a) Résoudre manuellement l'instance ci-dessus en utilisant cette heuristique (commencer par la ville 0).
 - b) Qu'appelle-t-on ce paradigme d'algorithmique.
 - c) La solution obtenue est-elle une borne inférieure ou supérieure de la solution optimale. Justifier.
 - d) Ecrire l'algorithme correspondant et évaluer sa complexité.